This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY
*of the Harvard College Library*

This book is
FRAGILE
and circulates only with permission.
Please handle with care
and consult a staff member
before photocopying.

Thanks for your help in preserving
Harvard's library collections.

33.2 3

A PARIS, CHEZ MALLET-BACHELIER,

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, n° 55.

# SUR L'ÉTABLISSEMENT

DES

# ARCHES DE PONT,

ENVISAGÉ

## AU POINT DE VUE DE LA PLUS GRANDE STABILITÉ,

MÉMOIRE

ACCOMPAGNÉ DE TABLES POUR FACILITER LES APPLICATIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. YVON VILLARCEAU,

MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ DES INGÉNIEURS CIVILS, DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATIQUE,
DE LA SOCIÉTÉ ROYALE ASTRONOMIQUE DE LONDRES, DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES ARTS DE LILLE;
ASTRONOME À L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

EXTRAIT DU TOME XII DU RECUEIL DES SAVANTS ÉTRANGERS
PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

PARIS.

IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

M DCCC LIII.

Inq 748.53.2

# SUR L'ÉTABLISSEMENT

DES

# ARCHES DE PONT,

ENVISAGÉ

AU POINT DE VUE DE LA PLUS GRANDE STABILITÉ.

## PREMIÈRE PARTIE.

[PRÉSENTÉE À L'ACADÉMIE DES SCIENCES DANS SA SÉANCE DU 10 NOVEMBRE 1845.] (*)

1. Les travaux des ingénieurs et des géomètres sur la théorie de l'équilibre des voûtes ont eu principalement pour objet, depuis Coulomb, l'examen de la stabilité des voûtes construites ou projetées. Malgré les savantes recherches auxquelles ils se sont livrés, les solutions proposées sont encore loin de satisfaire aux exigences de l'art de l'ingénieur : elles n'offrent à celui-ci que des moyens peu directs et assez incertains pour modifier les constructions à l'état de projet, dont elles ont fait connaître le défaut plus ou moins prononcé de stabilité; et le plus souvent ce n'est qu'après une suite de tâtonnements qu'on parvient à satisfaire aux conditions d'équilibre indiquées par les méthodes en usage.

Les solutions dont nous parlons seraient donc principalement

(*) Pour le Rapport, voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XXIII, séance du 9 novembre 1846.

utiles dans le cas où les éléments de la construction auraient été fixés d'une manière irrévocable; elles serviraient à faire connaître si le projet doit être admis ou rejeté. Mais aussitôt que l'on consent à apporter quelques modifications dans la courbure, soit de l'intrados, soit de l'extrados, ou dans les épaisseurs des voussoirs, on peut envisager la question sous un autre point de vue, et se proposer de déterminer complétement la forme de la voûte, de telle sorte qu'il en résulte une construction jouissant de la plus grande stabilité possible, et assujettie d'ailleurs à des conditions particulières qui sont relatives aux dimensions de l'arche en largeur et hauteur, à la charge qui doit s'élever au-dessus du plan horizontal tangent à l'extrados et à la résistance des matériaux employés. Le problème ainsi posé est celui qui se présente ordinairement dans la pratique.

Dans une série non encore terminée d'articles publiés dans la *Revue de l'Architecture et des Travaux publics* de M. César Daly, nous avons présenté la théorie de l'équilibre des voûtes en berceaux cylindriques sous le point de vue qui vient d'être indiqué. Parvenu à l'examen du cas particulier des ponts, la nécessité d'avoir égard à l'action du massif qui charge la voûte nous a présenté quelques difficultés. Nous n'avons pu lever ces difficultés qu'en assujettissant l'extrados à une discontinuité théorique, présentant, il est vrai, peu d'inconvénients dans la pratique, mais laissant à l'esprit une impression peu favorable. La solution que nous avons donnée dans la *Revue de l'Architecture* résulte d'une condition arbitraire, celle de l'égalité de pression par unité de surface dans tous les joints de la voûte : on peut conserver cette solution comme se rattachant à la classification que nous avons donnée des questions relatives à l'équilibre des voûtes. Mais rien n'oblige absolument à satisfaire en toute rigueur à la condition de l'uniformité des pressions dans les joints, et l'on peut maintenir la continuité de la surface extrados, sans qu'il en résulte une variation de pression trop considérable. Ajoutons que notre précédente solution n'est pas complète, analytiquement parlant : nous n'avons

effectué que l'une seule des deux intégrations qui doivent conduire à l'équation de la courbe intrados, de sorte que le résultat final dépend de tracés ou de quadratures. Abandonnant la condition qui avait eu pour conséquence la discontinuité de l'extrados, nous avons obtenu, depuis ce premier essai, une solution analytique complète, indépendamment de la solution graphique. Nous pensons que le Mémoire actuel, qui renferme l'exposé de nos recherches, ne sera point indigne de fixer l'attention de l'Académie des sciences, et offrira d'utiles renseignements aux ingénieurs.

Nous nous bornons dans ce Mémoire à l'examen du cas le plus important des arches de pont en berceaux terminés par des plans de tête perpendiculaires à l'axe, celui d'une arche chargée d'un massif terminé supérieurement par un plan horizontal.

Les équations finales que nous obtenons ne peuvent être résolues directement. En laissant de côté le moyen que présenterait la construction de tables spéciales pour tirer à vue la valeur des inconnues, nous sommes obligé d'avoir recours aux méthodes de tâtonnements, telles que celles des fausses positions ou des courbes d'erreurs; mais les tâtonnements se distinguent ici de ceux que nous avons signalés plus haut, en ce que, soit qu'on les effectue graphiquement ou numériquement, ils correspondent à des constructions stables, ce qui n'a pas lieu dans l'autre cas. Cette circonstance permet même de réduire le nombre des essais, attendu que si l'un d'eux ne s'éloigne pas trop de satisfaire aux données de la question, on peut adopter l'hypothèse sur laquelle il est basé, et modifier l'une des données, la demi-ouverture, qui n'est jamais déterminée avec une rigoureuse précision, en l'altérant de quelques centimètres, de manière que les équations de condition soient satisfaites.

La solution que nous proposons conduit à des formes de l'intrados différentes des formes généralement usitées, mais dont le tracé peut néanmoins s'effectuer par les procédés qu'on emploie lorsqu'il s'agit d'anses de panier. En cela nous nous conformons aux habitudes des ingénieurs : seulement, il arrive à ceux-ci de

déterminer les rayons de courbure de manière à donner à l'intrados une forme qui diffère le moins possible de celle d'une demi-ellipse, ou de n'employer qu'un seul arc de cercle, sans qu'aucune raison les porte à préférer ces courbes à d'autres, sinon la simplicité de leur construction; tandis que, d'après notre théorie, les rayons de courbure varient suivant une loi différente de celle qui a lieu dans l'ellipse, et dans le cercle où les rayons de courbure sont constants.

Le tracé de l'intrados, au moyen de ses rayons de courbure que nous pouvons construire géométriquement, nous offre une solution du problème. L'exactitude de cette solution ne dépend que de celle du tracé, et se trouve suffisante dans la plupart des cas.

2. Nous avons cru devoir faire précéder l'exposé de notre théorie d'une discussion sur l'indétermination du problème des voûtes en berceau, indétermination qui ne peut être levée qu'en ayant égard à la compressibilité de la matière des voussoirs; mais la théorie de la déformation des corps solides d'une structure analogue à celle des pierres à bâtir nous a paru trop peu avancée pour tenter utilement d'en faire la base d'une théorie de l'équilibre des voûtes. Nous avons donc dû diriger nos recherches d'un autre côté, en nous proposant d'obtenir des résultats indépendants, autant que possible, de la compressibilité des matériaux. Nous croyons avoir atteint notre but en substituant à la voûte en berceau une construction purement idéale, dont on peut soumettre toutes les circonstances au calcul, sans craindre d'y rencontrer l'indétermination dont nous venons de parler, et telle, néanmoins, qu'en la comparant à la voûte proposée, on puisse affirmer évidemment que si la première est en équilibre, il en sera de même *a fortiori* de la seconde. Les conditions que l'on fixe en envisageant le problème de cette manière sont confirmées *a posteriori* par une discussion relative aux effets produits par les surcharges accidentelles.

La considération des différents modes d'action des matériaux

qui composent le massif, sur les voussoirs, met en évidence une autre indétermination qui se présente à un haut degré près des plans de tête, dans les arches dont les parements extérieurs sont extradossés *en gradins*. Pour éviter la difficulté que présente cette nouvelle indétermination, nous sommes obligé de substituer à l'arrangement plus ou moins fortuit des matériaux du massif, une autre disposition idéale présentant quelque analogie avec les constructions usitées, et qui jouit de la propriété de donner lieu à des pressions normales à l'extrados et déterminées. L'action des matériaux du massif sur les reins de la voûte provenant de cette disposition idéale est la même que si la voûte était chargée d'un fluide ayant la densité et la forme du massif. Nous aurions pu, comme plusieurs auteurs, partir immédiatement de l'hypothèse de la fluidité; mais il nous a paru bon d'indiquer à quel mode de disposition répond cette hypothèse que nous adoptons, d'accord en cela avec de savants ingénieurs.

L'application des équations de l'équilibre au système idéal dont nous nous occupons ne peut se faire sans restrictions : on sait que ces équations ne sont satisfaites que lorsque les corps, après avoir été comprimés ou distendus, sont parvenus à un état permanent, sous l'influence des forces extérieures. Les résultats que nous déduisons de ces équations sont donc uniquement relatifs à l'état normal de la voûte après le décintrement, et la question de *l'inflexion* reste entière : on observera toutefois que nous fournissons les moyens de l'aborder, en déterminant la forme finale de la voûte. Quoique nous ne traitions point cette question *in extenso*, nous indiquons cependant les causes qui peuvent produire l'*inflexion*, et les moyens d'en éviter les principales. Nous sommes porté à croire que si les pieds-droits sont inébranlables et les joints de la voûte très-fins, une construction réalisée suivant nos principes ne donnera lieu qu'à une diminution de flèche si petite, qu'on pourra presque ne pas s'en préoccuper.

Sous les restrictions qui précèdent, nous avons mis le problème en équation, et ramené les principales difficultés analytiques à l'in-

tégration de l'équation différentielle de la courbe intrados. Cette équation contient un radical recouvrant un polynôme du quatrième degré; et son intégration, qui dépend des fonctions elliptiques, exige, comme on le sait, la décomposition du polynôme en ses facteurs du premier degré, ou la résolution d'une équation du quatrième. L'expression algébrique des racines est ici nécessaire pour conserver à la question toute sa généralité; nous avons pu l'obtenir par la réduction de ces racines en séries ordonnées suivant les puissances des épaisseurs, en bornant là, comme dans tous nos calculs, l'approximation aux termes du second ordre, ce qui suffit parfaitement. A l'aide de développements analogues, nous avons réussi à éviter l'emploi des fonctions elliptiques de troisième espèce, et obtenu une intégrale qui se simplifie notablement dans le cas assez ordinaire où la voûte et le massif peuvent être considérés comme ayant la même densité. La faible charge des voûtes de pont au-dessus de la clef rend le module peu différent de l'unité, de sorte que l'on peut suppléer aisément aux Tables de fonctions elliptiques. Enfin, nous présentons deux vérifications analytiques qui, jointes à des confirmations d'une autre nature, ne nous permettent pas d'avoir le moindre doute sur l'exactitude de nos développements.

Nous limitons l'usage de l'équation de courbe intrados à la détermination de l'inconnue principale, regardant le calcul des différences finies comme plus praticable lorsqu'il s'agit de calculer une suite de coordonnées de divers points d'une courbe : la méthode que nous indiquons à ce sujet, fait tout dépendre de l'expression du rayon de courbure, et nous affranchit du besoin de recourir aux fonctions elliptiques pour effectuer ces calculs.

Les constantes introduites par l'intégration sont au nombre de trois. Ce sont : 1° la hauteur de la charge qui s'élève au-dessus de la clef; 2° l'épaisseur à la clef; 3° une ligne égale à la hauteur d'une colonne de la matière des voussoirs dont le poids produirait sur une base horizontale la pression qui a lieu dans le voussoir de clef. En supposant donnée la première de ces constantes,

l'une des deux autres reste arbitraire dans les arches du genre de celles en *arc de cercle*, où la direction du joint des naissances n'est point fixée. Si l'on prend pour la troisième constante une valeur indiquée par la résistance des matériaux, l'épaisseur à la clef en résulte. Dans les arches en *anse de panier*, où le joint inférieur est sensiblement horizontal, les deux dernières constantes sont nécessairement déterminées; mais il peut se faire que leurs valeurs données par le calcul répondent à des pressions auxquelles les voussoirs soient incapables de résister, ou tellement faibles, qu'il en résulterait un emploi peu économique des matériaux : il devient alors nécessaire de modifier les données dans un sens que nous indiquons suivant le cas. Il est d'ailleurs convenable de se ménager la possibilité de faire varier les données dans de certaines limites, afin de pouvoir, au besoin, tenir compte de l'effet des surcharges accidentelles.

L'épaisseur à la clef est l'inconnue à la détermination de laquelle se ramène la solution du problème des arches de pont, et, en l'absence de tables, on n'en peut obtenir la valeur que par des approximations successives. Nous donnons, dans chaque cas, des valeurs approchées qui diffèrent assez peu des valeurs exactes de l'inconnue dont il s'agit, pour servir utilement de point de départ dans les calculs d'approximations successives.

L'importante question de la poussée contre les culées, dont la solution sert de base aux calculs relatifs à l'établissement de ces dernières, est résolue au moyen de nos formules, dès que la détermination de l'épaisseur à la clef est effectuée.

Nous terminons la première partie de notre Mémoire en présentant le résultat de comparaisons entre des arches établies suivant nos principes et des arches en *arc de cercle* ayant même épaisseur aux naissances. Ces dernières offrent moins de convexité vers les reins; et la différence des deux intrados paraît assez petite pour qu'on soit tenté d'adopter l'arc de cercle, à cause de la facilité qu'il offre dans la construction. On tomberait néanmoins dans une grave erreur en admettant cette conséquence : en effet, nous

faisons voir, dans le cas de l'*arc de cercle*, qu'à l'endroit où celui-ci s'écarte le plus de l'intrados construit suivant notre théorie, la résultante des pressions dans les joints peut se rapprocher de l'extrados, jusqu'à n'en être plus distante que d'une quantité égale au tiers de l'épaisseur des voussoirs : cela donne lieu, vers l'extrados, à des pressions par unité de surface, doubles de celles qui ont lieu dans l'autre arche, tandis que la pression vers l'intrados décroît jusqu'à devenir nulle. Il est facile d'en conclure que les voussoirs devront, dans ce cas, présenter une résistance double de celle qu'exigerait l'application de notre théorie. Les intrados des arches *en anse de panier* diffèrent aussi de nos courbes par une moindre convexité vers les reins, et donnent lieu à des remarques analogues aux précédentes.

La convexité vers les reins dans les arches de pont présente des avantages dont il est bon de profiter : car, outre la plus grande facilité qui en résulte pour l'écoulement des eaux, elle offre un aspect agréable et un caractère de hardiesse que l'on aime à rencontrer dans les constructions de ce genre.

### INDÉTERMINATION DU PROBLÈME DE L'ÉQUILIBRE DES VOÛTES EN BERCEAU.

3. On est dans l'habitude, lorsqu'il s'agit d'appliquer les principes de la statique, de considérer les corps comme absolument durs et incompressibles, et il est exact de dire, comme l'a fait remarquer M. Poncelet, que lorsque les corps compressibles ou extensibles sont parvenus à un état permanent, sous l'influence de forces extérieures, l'action de ces forces est la même que si ces corps étaient vraiment invariables de forme. Nous raisonnerons dans cette hypothèse, afin de n'employer que les principes les plus simples de la statique.

Considérons donc une portion de voûte comprise entre deux plans de joint quelconques, et supposons connue l'action, sur cette voûte, de la portion du massif de maçonnerie qui agit sur elle, ainsi que le poids même de cette portion de voûte; nous dési-

gnerons par R la résultante de ces deux forces, qui en général ne se réduiront point à un couple. Les autres forces extérieures qui sollicitent la voûte sont les pressions ou réactions qui s'exercent sur chacun des plans de joint extrêmes; soient T et T′ les résultantes de ces forces. La voûte étant en berceau, et les plans de tête perpendiculaires à l'axe, l'action des forces reste la même dans deux tranches d'égale épaisseur, déterminées par des sections parallèles aux plans de tête; nous pouvons dès lors considérer l'équilibre d'une tranche infiniment petite, ou simplement appliquer le principe relatif à l'équilibre d'un corps sollicité par trois forces situées dans un même plan, principe qui consiste en ce que la résultante de deux des forces est égale et opposée à la troisième. Prenons donc un point quelconque *r*, sur la direction de R; puis, par ce point, menons deux droites qui rencontrent les surfaces des joints extrêmes en deux points *t* et *t′*, et décomposons R suivant ces directions : les composantes de R pourront théoriquement être regardées comme égales et opposées aux réactions inconnues T et T′, d'après le principe énoncé. Si l'on réduit, en effet, les surfaces de contact aux seuls points *t* et *t′*, et que l'on ait égard à l'hypothèse relative à la dureté parfaite, en supposant d'ailleurs les points *t* et *t′* susceptibles de réagir dans tous les sens, les réactions T et T′ deviendront effectivement égales et opposées aux composantes de R obtenues ci-dessus.

En réalité, pour que les forces égales et opposées à ces composantes puissent être regardées comme donnant l'expression des réactions T et T′, il faudra, 1° que leur point de concours *r*, situé sur R, soit tellement choisi qu'elles ne deviennent point des forces de traction, à moins qu'on ne veuille avoir égard à l'adhésion des mortiers (le maximum de leur intensité dépendrait alors de cette adhésion); 2° les directions des composantes devront faire, avec les normales aux surfaces de joint, des angles inférieurs à l'angle du frottement, et dans le cas où l'on aurait égard à la cohésion des mortiers, ces angles devront rester plus petits que le plus grand des deux angles de frottement et de cohésion; 3° enfin, les points

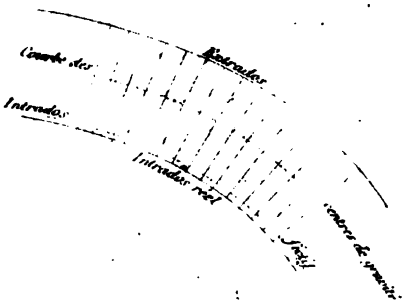
$t$ et $t'$ ne devront point être assez voisins de l'intrados ou de l'extrados, eu égard à l'intensité de T et T', pour que les voussoirs se brisent vers ces parties. Les intensités T et T' se trouveront limitées par la considération de l'étendue hypothétique des surfaces de contact et de la position des points $t$ et $t'$; il faudra que T et T' rentrent dans les limites qui en résulteront.

Malgré ces restrictions, qui limitent l'étendue dans laquelle les points $r$, $t$ et $t'$ peuvent être pris arbitrairement sur la direction de R et les surfaces extrêmes, le problème qui consiste à déterminer T et T' reste susceptible d'une infinité de solutions. (On a coutume de limiter encore les solutions en partageant la voûte en deux parties symétriques au moyen d'un plan vertical mené par l'axe et le sommet; et par motif de symétrie on admet que la réaction T qui a lieu au sommet est horizontale.) Toutefois, quel que soit le système de valeurs que l'on admette pour T et T', ces valeurs une fois fixées, les résultantes des réactions dans tous les plans de joints compris entre les extrêmes se trouvent déterminées; on les construit graphiquement avec la plus grande facilité. En effet, considérant le premier voussoir à partir du sommet, on compose l'action de la charge qui le sollicite, avec son propre poids, puis la réaction T qui a lieu au sommet de la voûte, avec la résultante des premières forces; la résultante des trois forces est égale et opposée à la réaction du deuxième voussoir sur le premier, et par conséquent égale à la réaction du premier sur le deuxième, et de même sens que cette réaction résultante. On obtient ainsi de proche en proche toutes les réactions intermédiaires, et la dernière, obtenue par le même procédé, doit, si l'on opère bien, coïncider avec celle T' faisant partie du système de valeurs T et T' d'où l'on est parti. Les réactions intermédiaires sont assujetties, quant à leurs intensités, directions et points d'application, aux mêmes conditions que ci-dessus; pour que l'équilibre puisse avoir lieu; et ce n'est que lorsqu'on a trouvé un système de valeurs de T et T' tel que toutes les autres réactions qui en résultent satisfassent à ces conditions, que l'on est

fondé à regarder l'équilibre de la voûte comme pouvant être stable. Ordinairement, quand on a trouvé une solution, il est rare qu'on n'en trouve pas une infinité d'autres comprises entre des limites plus ou moins resserrées, mais il est impossible de prévoir laquelle de ces solutions se réalisera, ou même si l'équilibre aura lieu, sans introduire dans le calcul la considération de la compressibilité de la matière des voussoirs. Or, avons-nous dit, la théorie de la déformation des corps solides tels que les pierres à bâtir, est trop peu avancée pour que l'on puisse en faire la base d'une théorie de l'équilibre des voûtes. C'est ce qui nous a mis dans la nécessité de substituer à une voûte proposée la construction idéale dont il a été question au n° 2, et qui va être décrite dans un instant. Rappelons cependant que le mode d'action sur les voussoirs, du massif qui charge la voûte, doit offrir un nouveau genre d'indétermination dont nous aurons à nous débarrasser en procédant d'une manière analogue; mais pour ne point compliquer inutilement les discussions, nous supposerons d'abord que l'action de la charge s'exerce normalement à l'extrados des voussoirs, sauf à ramener ensuite à ce cas celui dont nous nous occupons actuellement.

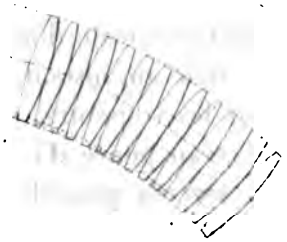
### ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE D'UNE VOÛTE EN BERCEAU SOUMISE À L'ACTION DE FORCES AGISSANT NORMALEMENT À L'EXTRADOS.

4. Considérons une portion de voûte comprise, d'une part, entre deux plans parallèles aux plans des têtes, et distants d'une quantité quelconque $\lambda$, qu'on pourra, si l'on veut, supposer égale à l'unité linéaire ou même infiniment petite, et, d'autre part, terminée par deux plans perpendiculaires à l'extrados.



Supposons la voûte divisée en voussoirs infiniment petits, par des plans de joint normaux à l'extrados. De cette division résultera la possibilité d'assigner la position du centre de gravité de chaque voussoir élémentaire : nous nommerons *courbe des centres de gravité* la courbe passant par tous ces centres.

Prenons sur chacune des normales un point voisin de l'intrados situé à une distance du centre de gravité correspondant, égale à celle qui sépare l'extrados de ce même centre; nous obtiendrons une nouvelle courbe que nous appellerons, pour abréger, *intrados fictif*.



Imaginons maintenant que, sans altérer en rien le poids des voussoirs élémentaires, la position de leur centre de gravité et l'action des forces normales à l'extrados, on les déforme de manière à réduire la surface de contact de deux voussoirs voisins, à l'étendue de l'élément superficiel correspondant aux arêtes ou génératrices qui ont leurs pieds sur la *courbe des centres de gravité*. Faisons, de plus, abstraction du frottement des voussoirs et de la résistance qu'oppose l'adhésion des mortiers à leur glissement les uns sur les autres.

Il est évident que si l'équilibre peut exister dans un système établi suivant ces hypothèses, il existera *a fortiori* dans un système où des séries de voussoirs infiniment petits seront changées en voussoirs de dimensions finies, et lorsqu'on remplacera le contact de deux arêtes par celui des surfaces de joint comprises entre l'extrados et l'intrados fictif, c'est-à-dire lorsque la presque totalité de la surface de chaque joint sera rétablie, de manière à donner lieu aux frottements, et à pouvoir mettre en jeu l'adhésion des mortiers, suivant le besoin; le rôle de ces forces étant de s'opposer au glissement quand il tend à se produire. Nous dirons plus; c'est que ces dernières forces ne se développeront pas, tant du moins

que la voûte restera soumise aux seules forces qu'on aura fait entrer dans les équations de son équilibre : en effet, puisque l'équilibre est supposé devoir exister sans l'intervention des frottements et adhésions, il n'y aura aucune tendance au mouvement dans un sens déterminé pour quelque voussoir que ce soit, et comme le frottement ne prend naissance que par suite de cette tendance, il est clair qu'il ne se produira aucun frottement; il en sera de même des effets de l'adhésion des mortiers. Ces forces ne se développant point dans notre voûte à son état normal, il est inutile, comme on le voit d'ailleurs assez clairement, de les faire entrer dans les équations de son équilibre.

Pour compléter la transformation de la construction idéale en la construction réelle proposée, il eût fallu rétablir le contact des voussoirs dans toute l'étendue comprise entre l'extrados et l'intrados, tandis que nous l'avons étendu seulement à l'espace compris entre la première de ces courbes et l'intrados fictif, comme cela aurait lieu si l'on pratiquait dans les joints un refouillement d'une profondeur égale à la très-petite distance qui sépare l'intrados fictif de l'intrados réel, distance qui n'atteindra jamais qu'un petit nombre de centimètres. Nous allons donner la raison de la nécessité qu'il en soit ainsi, du moins théoriquement. Dans la construction idéale, la résultante des pressions dans les joints passe par l'arête de contact située sur la *courbe des centres de gravité,* ou bien par le milieu du joint limité, comme nous venons de le dire dans la construction réelle; et l'on peut admettre qu'après le rétablissement du contact des surfaces planes de joint, la pression se distribuera uniformément sur ces surfaces, de même qu'on admet en pratique que les pressions se distribuent uniformément sur les surfaces quand les résultantes passent par leurs *centres de gravité.* C'est sur cette hypothèse que l'on s'appuie pour déduire des expériences connues les coefficients de résistance à l'écrasement. On sera d'autant mieux fondé à admettre l'égalité de la répartition des pressions, qu'on pourra la faciliter par l'introduction dans les joints d'une mince couche de ciment très-fin.

Si nous avions étendu la surface de joint jusqu'à l'intrados réel, la compressibilité de la matière des voussoirs eût pu avoir pour effet de déplacer la résultante des pressions, en tendant à la ramener vers le milieu du nouveau joint, et nous eussions eu à considérer le lieu géométrique de son point d'application aux divers voussoirs : l'introduction des coordonnées de cette courbe dans les équations du problème les compliquerait beaucoup plus que ne le fera la considération de l'intrados fictif qui, dans tous les calculs, exclura l'intrados réel. Pour nous, moyennant les conventions précédentes, les courbes *des centres de gravité* et des *résultantes des pressions* se confondront en une seule et même courbe. Quant à la condition relative au refouillement des joints, pour que ces courbes se confondent théoriquement, on pourra juger, d'après le faible intervalle qui sépare les intrados réel et fictif, du peu d'importance qu'il y aurait à s'y conformer pratiquement, dans le plus grand nombre des cas. Si l'on s'abstient d'effectuer ce refouillement, il n'en pourra résulter qu'une faible variation de la pression par unité de surface dans l'étendue de chaque joint.

Enfin, disons que la résultante des pressions étant assujettie à passer par les centres de gravité, c'est-à-dire très-près du milieu de l'épaisseur des voussoirs, et à être normale aux plans de joint, la voûte acquerra par cela même un grand degré de stabilité. En effet, quand la voûte sera soumise accidentellement à des charges auxquelles on n'aura point eu égard en fixant les conditions de son établissement, l'action de celles-ci sera, tant que l'équilibre pourra subsister, de déplacer le point d'application et la direction de la résultante des pressions en faisant varier l'intensité de cette dernière. Or, pour que le point d'application de la résultante puisse se déplacer dans un sens ou dans l'autre, sans trop se rapprocher de l'intrados ou de l'extrados, il est évident qu'il doit coïncider avec le point milieu de l'épaisseur lorsque les surcharges dont il s'agit n'ont pas lieu, c'est-à-dire lorsque la voûte est soumise à l'action des seules forces qu'on a fait entrer dans le calcul qui a servi de base à sa construction. D'un autre côté, la direction

de la résultante des pressions devant pouvoir s'écarter de celle qui répond à l'absence des surcharges accidentelles, sans cependant faire avec la normale aux plans de joint un angle qui atteigne le plus grand des deux angles du frottement et de la cohésion, il est également évident que la résultante des pressions doit être normale aux plans de joint dans l'état ordinaire de la voûte. Or l'équation $(d)$ du numéro suivant exprime précisément la même condition à laquelle il nous sera facile de satisfaire. Il résulte de ces considérations que le système dont nous nous occupons jouira d'une très-grande stabilité, ainsi que nous l'avons annoncé plus haut. Nous aurions presque pu nous dispenser de les présenter ici, tant elles sont évidentes : nous ferons seulement observer qu'en nous fondant sur ces considérations, il nous eût été facile d'éviter la substitution d'un système idéal à la réalité; mais il nous a semblé bon de présenter nos idées dans l'ordre où elles se sont produites.

Quant à la stabilité au point de vue de l'effet de surcharges accidentelles considérables; pour la constater sûrement, il resterait à s'assurer que, sous l'influence de ces surcharges, la résultante des pressions ne peut nulle part se rapprocher de l'intrados ou de l'extrados d'une quantité inférieure au tiers de l'épaisseur des voussoirs; que la pression maximum par unité de surface n'excédera pas la charge que peuvent supporter les matériaux sans inconvénient; enfin, que la direction de la résultante ne s'écartera de la normale aux plans de joint, que de quantités inférieures aux angles de frottement et de cohésion.

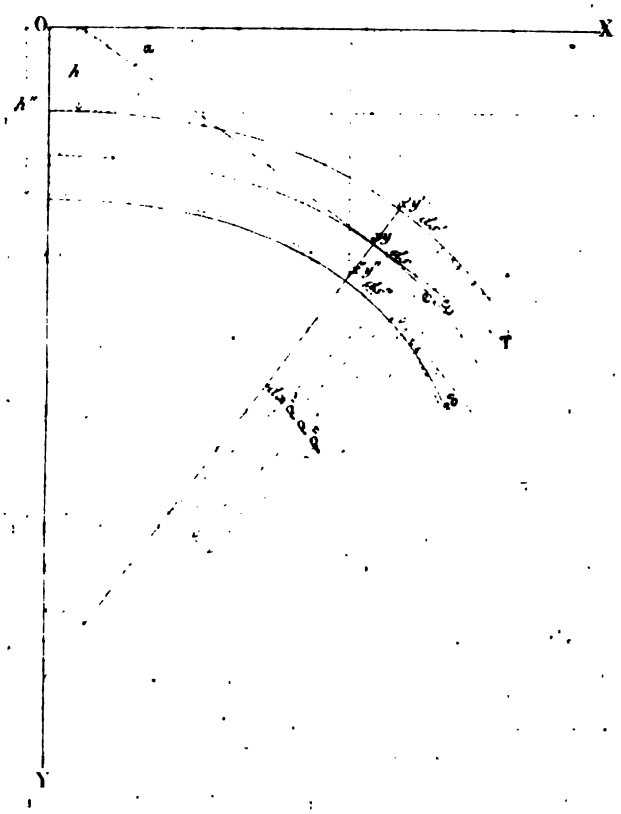
5. Ceci posé, avant de former les équations de l'équilibre du système idéal décrit ci-dessus, nous devons rappeler ce que nous avons dit, n° 3, relativement à l'application aux corps compressibles, des équations d'équilibre établies pour des corps de forme invariable, et faire remarquer que les conséquences auxquelles nous pourrons être conduit, s'appliqueront seulement à la voûte parvenue à son état permanent. Si nous déterminons la forme que doit conserver la voûte dans cet état, nous ne serons pas dispensé

pour cela de rechercher la forme qu'on doit lui donner pendant qu'elle repose sur ses cintres, forme qui soit telle, qu'après le décintrement elle se change en celle qui répond à l'état permanent. En un mot, la question de *l'inflexion de la voûte* restera tout entière; mais nous aurons fourni le moyen de l'aborder en déterminant une donnée indispensable de la question, la forme finale de la voûte : n'ayant point l'intention de la traiter ici, nous nous contenterons d'indiquer les causes qui peuvent contribuer à produire *l'inflexion* et les moyens d'éviter les principales.

Une des causes de l'inflexion des voûtes est dans la diminution de longueur de l'arc de la voûte, mesuré dans le sens de l'extrados ou dans celui de l'intrados, d'où résulte une diminution de la flèche ou un surbaissement : cette diminution de longueur de la voûte provient de la compression qu'éprouvent ses parties, et souvent de celle du mortier dans les joints; il importerait donc de diminuer l'épaisseur de ceux-ci, et d'employer, pour les remplir, des mortiers ou ciments qui se solidifient promptement ou avant que les effets de la compression puissent devenir sensibles. Disons que les constructeurs habiles se sont rendu compte de ces effets, et qu'ils emploient, pour les prévenir, les moyens dont il est question ici. Mais une autre cause de l'inflexion ou du surbaissement, à laquelle on ne paraît pas avoir beaucoup fait attention, provient de l'habitude où l'on est d'opérer le décintrement avant d'avoir achevé le massif ou tout au moins chargé les reins: or les formes d'arches généralement adoptées ne s'éloignent pas beaucoup de celles que notre théorie assigne aux voûtes chargées; si donc ces formes conviennent à l'équilibre sous l'influence de la charge, elles ne conviennent plus en l'absence de cette charge, et la voûte, abandonnée à elle-même lors du décintrement, doit se déformer en se surbaissant, ce qui arrive effectivement. On éviterait la plus grande partie de cet effet, en n'opérant le décintrement qu'après la construction entière du massif. Il pourrait bien se produire encore une inflexion, mais elle serait générale, et la déformation beaucoup moindre que dans le cas

contraire, où la clef s'abaisse, tandis que les reins se relèvent; le surbaissement final se trouverait donc considérablement diminué, il ne proviendrait plus alors que du resserrement des joints et de la compression des voussoirs.

Maintenant, désignons par :




$x'$, $y'$ les coordonnées d'un point quelconque de l'extrados, rapportées à des axes OX et OY, l'un horizontal, l'autre vertical, et parallèles aux plans des têtes;

$\alpha$ l'angle de la tangente en ce point avec l'axe des $x$;

$x$, $y$ les coordonnées du point de la *courbe des centres de gravité* situé sur la normale à l'extrados menée par le point $(x', y')$;

$x''$, $y''$ les coordonnées du point de l'intrados fictif situé sur la même normale;

$ds'$, $ds$ et $ds''$ les éléments de chacune des trois courbes précédentes, compris entre la normale à l'extrados et une autre normale menée par le point infiniment voisin, dont $x' + dx'$, $y' + dy'$ sont les coordonnées;

$\varepsilon$ l'épaisseur de la voûte au point $(x', y')$, c'est-à-dire la partie de la normale comprise entre l'extrados et l'intrados réel;

$e$ l'épaisseur fictive, ou la partie de la normale comprise entre l'extrados et l'intrados fictif;

$\delta$ la distance qui sépare le milieu de l'épaisseur réelle du voussoir de la position de son centre de gravité, de sorte qu'on ait la relation $\frac{1}{2}\varepsilon - \delta = \frac{1}{2}e$;

$\rho'$, $\rho$ et $\rho''$ les rayons de courbure des trois courbes en leurs points situés sur la même normale;

$d$P le poids du voussoir infiniment petit, compris entre les deux normales infiniment voisines;

$\varpi$ le poids de l'unité de volume de la matière des voussoirs;

N' la pression normale exercée sur l'extrados, par unité de surface, au point $(x', y')$;

T la résultante des pressions exercées perpendiculairement au premier joint de la partie de voûte considérée, par les parties extérieures de la construction;

$T_1$ la résultante des pressions exercées perpendiculairement au dernier plan de joint, par la voûte elle-même, sur les parties de la construction avec lesquelles elle est en contact : à cause de la réaction égale et contraire à l'action, $T_1$ exprimera en même temps l'intensité de la réaction reçue par le dernier voussoir; le sens de cette réaction sera contraire à celui de $T_1$;

$t$ et $t_1$ les pressions par unité de surface correspondantes à T et $T_1$;

$\mu$ la hauteur variable d'une colonne prismatique de la matière des voussoirs, dont le poids produirait, sur une base horizontale, la pression $t$ par unité de surface, d'où $\varpi\mu = t$;

$\mu_1$ la hauteur de la colonne correspondante à $t_1$, de sorte que l'on ait $\varpi\mu_1 = t_1$;

$i$ le rapport de la densité des matériaux qui composent la charge de la voûte à celle des voussoirs, de sorte que le poids de l'unité de volume des premiers soit $i\varpi$.

Les forces extérieures à l'arc de voûte sont :

1° La pression résultante T qui agit en un point $(x, y)$ de la *courbe des centres de gravité*, perpendiculairement à la normale à l'extrados ou parallèlement à la tangente à cette courbe, c'est-à-dire en faisant l'angle $\alpha$ avec l'axe de $x$; ses composantes suivant X et Y, sont respectivement $T \cos\alpha$, et $T \sin\alpha$.

2° La pression $T_1$ agissant à l'autre extrémité de l'arc de voûte en un point $(x_1, y_1)$ de la courbe des centres de gravité, suivant une direction opposée à celle de la tangente à l'extrados, ou faisant avec l'axe des $x$ l'angle $180° + \alpha_1$; de telle sorte que ses composantes suivant X et Y, sont $-T_1 \cos\alpha_1$ et $-T_1 \sin\alpha_1$.

3° Les divers poids $dP$ des voussoirs, dont les points d'application appartiennent à la courbe des centres de gravité : leurs composantes suivant X et Y, sont zéro et $dP$.

4° La pression exercée normalement sur chacun des voussoirs élémentaires avec l'intensité N′ par unité de surface. Or, la profondeur de la voûte parallèlement à l'axe étant $\lambda$, la surface élémentaire de l'extrados est $\lambda ds'$, d'où résulte $N'\lambda ds'$ pour la valeur de l'action exercée sur un voussoir élémentaire. On la supposera dirigée vers le centre de courbure. (S'il en était autrement, comme cela pourrait avoir lieu, dans le cas d'arches complétement submergées ou destinées à recouvrir des conduites souterraines, le signe de N′ pourrait être changé.) Les coordonnées des points d'application de cette force sont celles $x'$ et $y'$ de l'extrados. On obtiendra ses composantes, en observant que la normale fait avec l'axe des $x$, l'angle $90° + \alpha$, et avec l'axe des $y$ l'angle $\alpha$, dont les cosinus sont respectivement $-\sin\alpha$ et $+\cos\alpha$; les composantes de cette force sont donc :

$$\text{suivant X,} \quad -N'\lambda ds' \sin\alpha = -N'\lambda dy';$$

$$\text{suivant Y,} \quad +N'\lambda ds' \cos\alpha = +N'\lambda dx'.$$

Si nous appliquons maintenant à la portion d'arc de voûte les six équations d'équilibre d'un corps solide qui doivent également être satisfaites dans le cas d'un système de corps solides, nous remarquerons que toutes les forces agissant dans des plans parallèles, la somme des projections de ces forces sur un axe perpendiculaire à ces plans est nécessairement nulle. L'une des équations dite *de translation* est ainsi naturellement satisfaite. Si, pour plus de simplicité, on suppose $\lambda$ infiniment petit, ce qui réduit toutes les forces à être situées dans un même plan, celui des $xy$, les directions des forces coupant les deux axes ou bien leur étant parallèles, les moments de rotation autour de ces axes seront nécessairement nuls, et deux des équations dites *de rotation* seront également satisfaites : en sorte qu'il suffit d'écrire les équations qui expriment que les sommes des projections des forces sur les axes X et Y sont nulles, et celle exprimant que la somme des moments de ces forces autour d'un troisième axe perpendiculaire au plan des deux premiers, est également nulle.

Ces équations sont

$$\left.\begin{array}{l} -T_1 \cos\alpha_1 + T\cos\alpha - \int N'\lambda dy' = 0, \\ -T_1 \sin\alpha_1 + T\sin\alpha + \int N'\lambda dx' + \int dP = 0, \\ \left.\begin{array}{l} -y_1 T_1 \cos\alpha_1 + y T\cos\alpha - \int N'\lambda y' dy' \\ +x_1 T_1 \sin\alpha_1 - x T\sin\alpha - \int N'\lambda x' dx' - \int x dP \end{array}\right\} = 0. \end{array}\right\} (a)$$

Nous passerons facilement aux équations relatives à l'équilibre d'un voussoir élémentaire en réduisant dans les équations $(a)$ les différences $\alpha_1 - \alpha$, à la différentielle $d\alpha$, $x_1 - x$, et $y_1 - y$ à $dx$ et $dy$; les intégrales contenues dans les mêmes équations se réduiront à un de leurs éléments, et les différences de deux termes composés de même en $\alpha$, $x$, $y$, T, et $\alpha_1$, $x_1$, $y_1$, $T_1$, se réduiront aux différentielles de ces termes. De cette manière, les équations différentielles du problème seront

$$\left.\begin{aligned} &-d.\mathrm{T}\cos\alpha - \mathrm{N}'\lambda dy' = 0, \\ &-d.\mathrm{T}\sin\alpha + \mathrm{N}'\lambda dx' + d\mathrm{P} = 0; \end{aligned}\right\} (b)$$

$$-d.y\,\mathrm{T}\cos\alpha + d.x\,\mathrm{T}\sin\alpha - \mathrm{N}'\lambda\,(y'dy' + x'dx') - xd\mathrm{P} = 0. \quad (c)$$

Nous allons changer la forme des deux premiers termes de la dernière de ces équations, en effectuant comme il suit les différentiations indiquées :

$$d.y\,\mathrm{T}\cos\alpha = y\,d.\mathrm{T}\cos\alpha + \mathrm{T}\cos\alpha\,dy,$$
$$d.x\,\mathrm{T}\sin\alpha = x\,d.\mathrm{T}\sin\alpha + \mathrm{T}\sin\alpha\,dx.$$

Au moyen de ces relations, et en observant que l'on a $\cos\alpha = \frac{dx'}{ds'}$, $\sin\alpha = \frac{dy'}{ds'}$, nous pourrons mettre l'équation $(c)$ sous la forme

$$-y\,d.\mathrm{T}\cos\alpha + x\,d.\mathrm{T}\sin\alpha - \mathrm{T}\left(\frac{dx'}{ds'}\,dy - \frac{dy'}{ds'}\,dx\right)$$
$$- \mathrm{N}'\lambda\,(y'dy' + x'dx') - xd\mathrm{P} = 0.$$

Or nous pouvons simplifier cette équation au moyen des équations $(b)$; multiplions la première de celles-ci par $y$ et la deuxième par $x$, puis retranchons, il viendra

$$-y\,d.\mathrm{T}\cos\alpha + x\,d.\mathrm{T}\sin\alpha - \mathrm{N}'\lambda\,(ydy' + xdx') - xd\mathrm{P} = 0.$$

De cette équation et de la précédente on déduit

$$\mathrm{T}\left(\frac{dx'}{ds'}\,dy - \frac{dy'}{ds'}\,dx\right) + \mathrm{N}'\lambda\,[(y' - y)\,dy' + (x' - x)\,dx'] = 0;$$

mais, comme les points $(x, y)$ et $(x', y')$ sont situés sur la même normale à l'extrados, les coordonnées $x$ et $y$ satisfont à l'équation de cette normale, qui peut se mettre sous la forme

$$(y' - y)\,dy' + (x' - x)\,dx' = 0,$$

et l'équation dont nous nous occupons se réduit à

$$\frac{dx'}{ds'}\,dy - \frac{dy'}{ds'}\,dx = 0, \qquad (d)$$

en supprimant le facteur T, qui ne peut être nul : on en tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}.$$

Ainsi l'équation ($c$) indique que la tangente à la *courbe des centres de gravité* doit être parallèle à la tangente à l'extrados.

Exprimons analytiquement la condition fournie par l'équation ($d$) : pour cela nous observerons que les différences des coordonnées des points de l'extrados et de la *courbe des centres de gravité* situés sur la même normale, ne sont autre chose que les projections sur les directions de ces coordonnées, de la distance $\frac{1}{2}\,e$ qui sépare le centre de gravité de l'extrados; nous aurons donc les relations

$$x - x' = -\frac{1}{2}\,e\,\sin\alpha,$$

$$y - y' = +\frac{1}{2}\,e\,\cos\alpha;$$

d'où, en différentiant,

$$dx = dx' - \frac{1}{2}\,e\,\cos\alpha\,d\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\,de,$$

$$dy = dy' - \frac{1}{2}\,e\,\sin\alpha\,d\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\,de.$$

Mettant ces valeurs de $dx$ et $dy$ dans l'équation ($d$), celle-ci devient

$$\frac{1}{2}\,e\left(\cos\alpha\,\frac{dy'}{ds'} - \sin\alpha\,\frac{dx'}{ds'}\right)d\alpha + \frac{1}{2}\left(\cos\alpha\,\frac{dx'}{ds'} + \sin\alpha\,\frac{dy'}{ds'}\right)de = 0.$$

Or le facteur de $d\alpha$ se réduit à zéro, et celui de $de$ à $\frac{1}{2}$, à cause de $\frac{dy'}{ds'} = \sin\alpha$, et $\frac{dx'}{ds'} = \cos\alpha$; il en résulte

$$de = 0,$$

ou, en intégrant,

$$e = \text{constante}.$$

Telle est la condition exprimée finalement par l'équation des moments (*); nous en déduirons immédiatement une relation entre l'épaisseur variable $\varepsilon$ et la quantité $\delta$ qui sépare le point milieu de l'épaisseur du voussoir de son centre de gravité; cette relation indiquée plus haut est

$$\frac{1}{2}\varepsilon - \delta = \frac{1}{2}e,$$

d'où

$$\varepsilon = e + 2\delta, \qquad (e)$$

équation qui fixera la valeur de $\varepsilon$ quand celle de $\delta$ aura été déterminée, et dans laquelle il est bien entendu que $e$ désigne désormais une constante.

Les équations du problème se trouvent actuellement réduites au système des équations ($b$) et ($e$). Toutefois, dans le but de simplifier l'intégration des premières, nous allons former avec celles-ci un système de deux nouvelles équations propres à les remplacer, et que nous emploierons par la suite avec les équations ($b$). Écrivons ces équations sous la forme

$$d.\mathrm{T}\cos\alpha = -\mathrm{N}'\lambda\sin\alpha\, ds'$$

$$d.\mathrm{T}\sin\alpha = +\mathrm{N}'\lambda\cos\alpha\, ds' + d\mathrm{P}.$$

(*) Il eût été facile d'établir *a priori* cette condition, en observant que les plans de joint sont normaux à l'extrados, et que la courbe des centres de gravité est perpendiculaire aux plans de joint, ce qui établit le parallélisme de cette courbe et de l'extrados, et entraîne comme condition la constance de la quantité $\frac{1}{2}e$. De cette manière, les quatre forces qui sollicitent le voussoir élémentaire passent par un même point, le centre de gravité, et l'équation des moments est naturellement satisfaite. L'on eût pu ainsi poser immédiatement les équations ($b$) sans passer par les équations ($a$). Mais il nous a paru convenable de suivre, autant que possible, une méthode uniforme.

Multiplions, d'une part, la première par $\cos\alpha$, la deuxième par $\sin\alpha$, et ajoutons; puis, d'autre part, multiplions la première par $\sin\alpha$ et la deuxième par $\cos\alpha$, et retranchons : nous aurons

$$\cos\alpha\, d.\mathrm{T}\cos\alpha + \sin\alpha\, d.\mathrm{T}\sin\alpha = \sin\alpha\, d\mathrm{P},$$

$$\cos\alpha\, d.\mathrm{T}\sin\alpha - \sin\alpha\, d.\mathrm{T}\cos\alpha = \cos\alpha\, d\mathrm{P} + \mathrm{N}'\lambda ds';$$

la différentiation donne d'ailleurs

$$d.\mathrm{T}\cos\alpha = \cos\alpha\, d\mathrm{T} - \mathrm{T}\sin\alpha\, d\alpha,$$

$$d.\mathrm{T}\sin\alpha = \sin\alpha\, d\mathrm{T} + \mathrm{T}\cos\alpha\, d\alpha.$$

Pour former avec ces valeurs celles des premiers membres des équations précédentes, il suffit de multiplier la première par $\cos\alpha$, la deuxième par $\sin\alpha$, et d'ajouter; puis ensuite de multiplier la première par $\sin\alpha$, la deuxième par $\cos\alpha$, et de retrancher; on obtient ainsi immédiatiement

$$\left.\begin{aligned} d\mathrm{T} &= \sin\alpha\, d\mathrm{P}, \\ \mathrm{T}d\alpha &= \cos\alpha\, d\mathrm{P} + \mathrm{N}'\lambda ds'. \end{aligned}\right\} (5)$$

Telles sont les combinaisons que nous nous proposions d'obtenir. On pourrait former immédiatement ces équations en égalant à zéro les sommes des projections des forces qui sollicitent un voussoir, sur deux axes, l'un tangent à l'extrados, l'autre normal à cette courbe. Il faudrait seulement faire attention à ce que, si l'on prend pour l'un des axes la normale menée par l'une des extrémités de l'élément $ds'$, la projection de T sur la partie de cet axe dirigée vers le centre de courbure est nulle, et la projection de la force $(\mathrm{T} + d\mathrm{T})$ sur la même partie s'obtient en multipliant par $\cos(90^\circ + d\alpha)$ ou $-\sin d\alpha$; la composante a dès lors pour expression $-\mathrm{T}d\alpha$, en négligeant les infiniment petits des ordres supérieurs. Les autres composantes s'obtiendraient sans difficulté.

6. Nous allons maintenant nous occuper de déterminer la position des centres de gravité et le poids d'un voussoir élémentaire.

Considérons le voussoir compris entre deux plans normaux infiniment voisins, faisant entre eux l'angle $d\alpha$ des deux tangentes consécutives : décomposons la surface base du voussoir en tranches infiniment minces au moyen d'arcs de cercle de rayons variables $r$, décrits du centre de courbure; soit $dr$ la largeur d'une de ces tranches, sa surface sera $rd\alpha\, dr$, et, si nous prenons les moments par rapport à une droite située dans le plan de la base, et passant par le centre de courbure, le moment élémentaire de la tranche aura pour expression $r^2 d\alpha\, dr$. En se rappelant que $\rho'$ désigne le rayon de courbure de l'extrados, on aura, pour expression de la somme des moments élémentaires,

$$d\alpha \int_{\rho'-\varepsilon}^{\rho'} r^2 dr = \frac{1}{3}\left[\rho'^3 - (\rho' - \varepsilon)^3\right] d\alpha,$$

ou en réduisant,

$$\varepsilon\rho'^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\rho'} + \frac{\varepsilon^2}{3\rho'^2}\right) d\alpha.$$

Soit d'une autre part $dS$ la surface base du voussoir élémentaire, son expression est

$$dS = d\alpha \int_{\rho'-\varepsilon}^{\rho'} r dr = \frac{1}{2}\left[\rho'^2 - (\rho' - \varepsilon)^2\right] d\alpha = \varepsilon\rho' \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\rho'}\right) d\alpha;$$

celle de la distance du centre de gravité au centre de courbure est d'ailleurs $\rho' - \left(\frac{1}{2}\varepsilon - \delta\right)$; il s'ensuit que le moment de la surface est

$$\varepsilon\rho'\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\rho'}\right)\left(\rho' - \frac{1}{2}\varepsilon + \delta\right)d\alpha.$$

Égalant maintenant la somme des moments au moment de la somme, on aura, en supprimant les facteurs communs,

$$1 - \frac{\varepsilon}{\rho'} + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^2}{\rho'^2} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\rho'}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\rho'} + \frac{\delta}{\rho'}\right);$$

on en tirera ensuite, en développant, réduisant et résolvant, la valeur suivante,

$$\frac{\delta}{\rho'} = \frac{1}{12}\,\frac{\dfrac{\varepsilon^2}{\rho'^2}}{1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon}{\rho'}}. \qquad (*)$$

---

(*) Pour ceux des lecteurs qui connaîtraient nos articles sur les voûtes insérés dans la *Revue de l'Architecture*, nous allons montrer que l'expression de $\delta$ donnée dans le premier article s'accorde exactement avec celle que nous venons de trouver, malgré la différence de forme que présentent les deux expressions.

La valeur de $\delta$ obtenue dans ce Recueil a été tirée de l'équation

$$(\rho - \delta)^2 - \rho(\rho - \delta) = -\frac{1}{12}\varepsilon^2,$$

qui donne

$$(\rho - \delta)(\rho - \delta - \rho) = -\frac{1}{12}\varepsilon^2,$$

d'où

$$\delta = \frac{\frac{1}{12}\varepsilon^2}{\rho - \delta}.$$

Or la courbe des centres de gravité n'était point assujettie à être parallèle à l'extrados. Si nous joignons cette condition qui revient à

$$\rho' = \rho + \frac{1}{2}\varepsilon - \delta,$$

La quantité $\frac{\varepsilon}{\rho'}$ étant toujours une petite fraction, on est en droit de développer le deuxième membre de l'équation précédente, suivant les puissances de cette quantité, ce qui donne

$$\frac{\delta}{\rho'} = \frac{1}{12}\frac{\varepsilon^2}{\rho'^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\rho'} + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{\rho'^2} + \text{etc.}\right);$$

mais, par la suite, nous nous contenterons d'avoir égard aux termes du premier et du deuxième ordre de petitesse, en regardant le rapport $\frac{\varepsilon}{\rho'}$ comme étant du premier, ce qui réduira la valeur de $\frac{\delta}{\rho'}$ à

$$\frac{\delta}{\rho'} = \frac{1}{12}\frac{\varepsilon^2}{\rho'^2}, \qquad (g)$$

et nous dirons que cette quantité est du deuxième ordre.

Quant au poids du voussoir, son expression sera

$$dP = \varpi\lambda dS = \varpi\lambda\varepsilon\rho'\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\rho'}\right)d\alpha,$$

ou bien

$$dP = \varpi\lambda\varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\rho'}\right)ds'.$$

Cette expression et la précédente $(g)$ ont lieu indépendamment de toute condition tirée des équations de l'équilibre; nous allons

---

d'où

$$\rho - \delta = \rho' - \frac{1}{2}\varepsilon;$$

l'expression précédente deviendra

$$\delta = \frac{\frac{1}{12}\varepsilon^2}{\rho' - \frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Or cette relation est identique avec celle que nous venons d'obtenir dans le mémoire actuel.

les combiner avec l'équation $(e)$, de manière à en déduire de nouvelles valeurs qui satisfassent à cette équation. Substituons dans l'équation $(g)$ la valeur $(e)$ de $\varepsilon$ bornée à son premier terme, puisque nous négligeons les termes d'ordre supérieur au deuxième; il viendra d'abord

$$\frac{\delta}{\rho'} = \frac{1}{12}\frac{e^2}{\rho'^2}; \qquad (h)$$

puis ensuite, mettant cette valeur dans l'équation $(e)$, on aura

$$\varepsilon = e\left(1 + \frac{1}{6}\frac{e}{\rho'}\right). \qquad (i)$$

Pour former avec cette valeur celle de $d\mathrm{P}$, on peut remplacer par $e$ l'$\varepsilon$ qui entre dans la parenthèse du deuxième membre, car cette parenthèse étant multipliée par $\varepsilon$ en dehors, il n'en résultera qu'une erreur du troisième ordre : on aura ainsi

$$d\mathrm{P} = \varpi\lambda e\left(1 + \frac{1}{6}\frac{e}{\rho'}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{e}{\rho'}\right)ds';$$

puis, en effectuant le produit des parenthèses, et y négligeant les termes du deuxième ordre, de manière à ne négliger finalement que ceux du troisième,

$$d\mathrm{P} = \varpi\lambda e\left(1 - \frac{1}{3}\frac{e}{\rho'}\right)ds'. \qquad (j)$$

Maintenant, les valeurs de $\varepsilon$ et de $\frac{d\mathrm{P}}{ds'}$ ne se trouvent dépendre que du rayon de courbure.

Il reste à substituer cette valeur de $d\mathrm{P}$ dans les équations $(b)$ et $(f)$; nous allons le faire, et en même temps y remplacer la résultante T par son expression $\lambda e\mu\varpi$, dans laquelle $\lambda e$ est l'étendue de la surface du joint, et $\mu$ la hauteur du prisme dont le poids produirait la pression T sur la surface $\lambda e$, si elle était horizontale. Disons, en passant, que l'usage de la hauteur $\mu$ est ici le même que celui des hauteurs manométriques dans la mécanique

des fluides; il a, comme ces dernières, l'avantage de rendre plus saisissable pour l'esprit l'intensité des pressions, que tel ou tel nombre de kilogrammes par mètre carré : il sert, d'un autre côté, à mettre en évidence l'homogénéité des différents termes des équations, de telle sorte qu'il n'y entre plus que des lignes et des rapports numériques. Ces considérations nous ont décidé à remplacer partout les pressions par unité de surface, au moyen des hauteurs qui les représentent; les premières, que nous avons désignées par $t$, sont d'ailleurs liées à celles-ci par la relation

$$t = \varpi\mu. \qquad (k)$$

Nous écrirons donc

$$T = \varpi\lambda e\mu, \quad dT = \varpi\lambda e d\mu.$$

Ces valeurs et celle $(j)$ de $dP$ étant portées dans les équations $(b)$ et $(f)$, on aura, en divisant ensuite par $\varpi\lambda e$,

$$\left.\begin{aligned} d.\mu\cos\alpha &= -\frac{N'}{\varpi e}\,dy', \\ d.\mu\sin\alpha &= +\frac{N'}{\varpi e}\,dx' + \left(1 - \frac{1}{3}\frac{e}{\rho'}\right)ds', \\ d\mu &= \left(1 - \frac{1}{3}\frac{e}{\rho'}\right)\sin\alpha\, ds', \\ \mu d\alpha &= \left(1 - \frac{1}{3}\frac{e}{\rho'}\right)\cos\alpha\, ds' + \frac{N'}{\varpi e}\,ds'. \end{aligned}\right\} (l)$$

Les deux premières de ces équations ne peuvent être intégrées sans que l'on se donne l'expression de la variable N′ en fonction de l'une des coordonnées; les deux dernières, au contraire, quoiqu'elles n'en soient que des combinaisons, conduisent facilement aux valeurs de $\mu$ et du rayon de courbure $\rho'$, quel que soit N′. En effet, à cause de $\sin\alpha\, ds' = dy'$ et $\frac{ds'}{\rho'} = d\alpha$, on peut mettre la troisième équation $(l)$ sous la forme

$$d\mu = dy' - \frac{1}{3}\, e \sin\alpha\, d\alpha;$$

or cette équation s'intègre immédiatement, et si l'on désigne par $\mu_0$ et $h$ les valeurs de $\mu$ et $y'$ qui ont lieu pour $\alpha = 0$, on aura, en intégrant à partir de ces limites,

$$\mu - \mu_0 = y' - h - \frac{1}{3} e (1 - \cos\alpha). \qquad (m)$$

D'autre part, substituons la valeur de $\mu$ tirée de cette équation, dans la dernière équation $(l)$ divisée par $d\alpha$; et observons que $\frac{ds'}{d\alpha} = \rho'$, nous aurons

$$\mu_0 + y' - h - \frac{1}{3} e (1 - \cos\alpha) = \left(\rho' - \frac{1}{3} e\right) \cos\alpha + \frac{N'}{\varpi e} \rho';$$

tirant ensuite la valeur de $\rho'$, il viendra

$$\rho' = e \frac{\mu_0 + y' - h - \frac{1}{3} e (1 - 2\cos\alpha)}{\frac{N'}{\varpi} + e \cos\alpha}. \qquad (n)$$

Les équations $(m)$ et $(n)$ sont équivalentes aux deux premières équations $(l)$, et pour pouvoir faire usage des unes et des autres, il devient indispensable de préciser la valeur de N′ en fonction des coordonnées; c'est ce que nous allons essayer de faire en examinant les diverses manières dont les charges que supporte la voûte peuvent agir sur les voussoirs.

### INDÉTERMINATION DE L'ACTION DES CHARGES SUR LES REINS DES VOÛTES DANS LES ARCHES DE PONT.

7. Nous ne nous occuperons point dans ce Mémoire des arches dans lesquelles les plans de joint s'étendent jusqu'au plan horizontal tangent à l'extrados. Dans les autres cas, on distinguera l'action exercée sur la voûte par la construction en assises horizontales qui forme les parements extérieurs, et celle que produit la masse, plus ou moins irrégulièrement disposée, des matériaux qui remplissent l'espace intermédiaire.

La disposition irrégulière des matériaux d'un massif formé par un blocage de maçonnerie ou composé de parties semi-fluides,

tel qu'un massif de terre ou de béton, rend tout à fait impossible la détermination de leur action sur la voûte. Tout ce que l'on pourrait faire de mieux à cet égard serait de recourir au calcul des probabilités pour découvrir le mode d'action le plus probable de cette partie du massif.

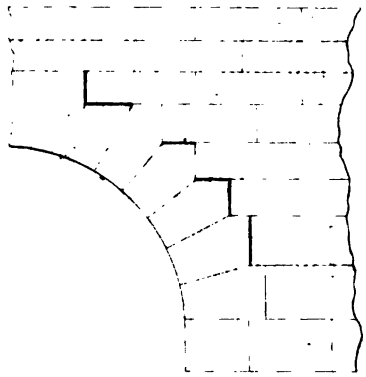
Nous allons voir que la disposition presque régulière de la construction par assises horizontales présente autant de difficultés.

La répartition de la charge sur les différents voussoirs dépend, dans ce cas, de la pose des assises horizontales dont les extrémités s'appuient sur les reins de la voûte, et des tassements qui se produisent pendant la construction et après le décintrement. Les effets qui se produisent pendant la pose, et le tassement, dépendent essentiellement du soin qu'apportent les ouvriers pendant la construction, et de la nature des matériaux employés : de là naît l'impossibilité de tenir compte, dans le calcul, de circonstances si variables et si difficiles à apprécier. C'est à cette variation que tient l'indétermination des actions exercées par les assises horizontales sur les voussoirs des plans de tête. Pour bien nous rendre compte des effets de la pose des assises horizontales, il nous suffira d'examiner les cas extrêmes qu'elle peut présenter.

Le plus souvent, dans les constructions de voûtes chargées, les voussoirs des plans de tête ne se terminent point vers l'extrados par une surface cylindrique ayant cette courbe pour directrice, mais bien par deux surfaces planes, l'une horizontale et passant par l'arête supérieure du voussoir, l'autre verticale et passant par l'arête inférieure située sur l'extrados. Au moyen de cette disposition *en gradins*, on met de niveau les faces horizontales des voussoirs avec celles des assises de maçonnerie qui forment les parements extérieurs de la construction.

Nous examinerons diverses circonstances de la pose des assises, dans cette disposition par rapport aux voussoirs. Il est facile de voir que les faces verticales des assises peuvent être plus ou moins serrées, et même que la face verticale de contact d'une assise avec le voussoir peut ne supporter aucune pression, soit

pendant la pose, soit après que le tassement a été produit; cela dépendra principalement de la pose de l'assise considérée et de celle des assises voisines. Il pourra donc y avoir un plus ou moins grand nombre de voussoirs dont les têtes ne recevront des assises



adjacentes aucune pression horizontale; de même que pour d'autres voussoirs, ces pressions pourront aussi être plus ou moins considérables. D'un autre côté, la pression verticale qu'une pierre appartenant à une assise exercera sur la face horizontale de la tête du voussoir correspondant à l'assise inférieure, dépendra de plusieurs circonstances, telles que l'exécution plus ou moins parfaite des surfaces de joint, et la longueur de la partie de la pierre considérée engagée entre les assises supérieure et inférieure, du côté opposé à la tête du voussoir : on conçoit encore une exécution ou une pose assez imparfaites, pour que quelques-unes des faces horizontales de joint communes à l'assise et au voussoir inférieur ne supportent aucune pression; de même aussi, il pourra arriver que ces pressions soient très-grandes, comme dans le cas où la pierre dont il s'agit aurait une plus grande épaisseur vers la tête du voussoir que vers le côté opposé (*). Il est permis encore de se

(*) Ayant bien saisi ces particularités, on s'expliquera aisément les ruptures que présentent parfois les voussoirs dans une direction perpendiculaire à celle des plans de joint, et vers le tiers ou la moitié de leur longueur à partir de l'intrados. Lorsque les résultantes des pressions sur les plans de joint des voussoirs passent

représenter un cas dans lequel les pressions horizontales et verticales transmises par les assises aux têtes des voussoirs seraient nulles en même temps : ce serait celui où le système des assises horizontales se tiendrait de lui-même en équilibre, comme dans les constructions égyptiennes; la voûte serait simplement touchée, sans être pressée par ces assises, et ne serait d'aucune utilité dans la construction, de telle sorte qu'on pourrait la supprimer, et qu'elle devrait se tenir en équilibre d'elle-même si l'on voulait la conserver.

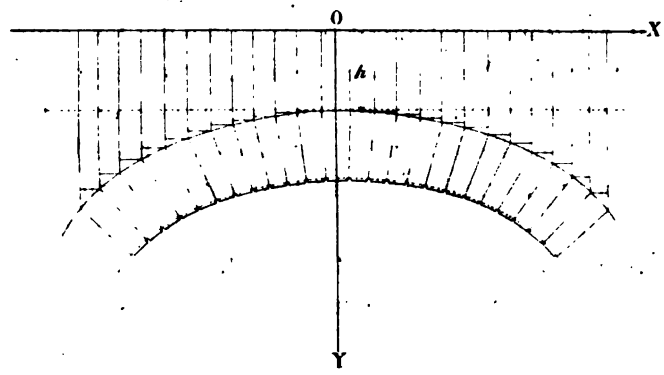
De ce qui précède, il faut conclure qu'il est impossible d'assigner aucune valeur déterminée aux composantes horizontale et verticale de l'action exercée par les parties du massif sur chaque voussoir; il est donc également impossible de les soumettre à aucun calcul précis. Nous serons obligé, pour lever la difficulté qui résulte de cette indétermination, de procéder à l'égard du massif comme nous l'avons fait pour la voûte; nous lui substituerons une disposition idéale donnant lieu à des pressions normales déterminées : il y aura ensuite à examiner s'il est convenable de passer, sans modifier le jeu des forces, du système idéal dont il s'agit, à telle disposition des matériaux que l'on se proposera de réaliser.

---

près de l'intrados, les joints s'ouvrent vers l'extrados, d'une quantité plus ou moins appréciable à l'œil. Le voussoir est alors dans le cas d'un solide encastré vers l'une de ses extrémités, et sollicité à l'autre par une force non dirigée dans le sens de sa longueur. Cette force est ici la résultante des pressions horizontales et verticales exercées par les assises contiguës; il y a possibilité de rupture dès que cette résultante prend une direction oblique par rapport à la longueur du voussoir. La rupture tend à se produire le plus près possible de la section d'encastrement ou de la courbe de la résultante des pressions; et elle y est facilitée, non-seulement parce que le moment de la force qui produit la rupture va en croissant vers ce point, tandis que le moment des résistances à la rupture décroît avec la section du voussoir, mais encore parce que la pression totale exercée par les voussoirs adjacents se trouve concentrée dans le voisinage de cette section, et qu'il en résulte en ces points une désagrégation de la matière du voussoir, qui n'attend pour se manifester que le concours d'une nouvelle force. Ces considérations indiquent l'importance qu'il peut y avoir à assurer la direction normale de l'action de la charge sur les voussoirs.

DISPOSITION DE LA CHARGE EXTÉRIEURE D'UNE ARCHE, DONNANT LIEU À DES PRESSIONS NORMALES DÉTERMINÉES.

8. Dans le but d'abréger les descriptions, disons comment on pourra passer de la disposition *en gradins* dont il a été question dans le numéro précédent, à la disposition idéale que nous nous proposons d'étudier. Supposons d'abord, dans la première, la division de la voûte en voussoirs effectuée au moyen de plans normaux infiniment rapprochés : les deux faces de la tête de chaque




voussoir qui déterminent les gradins seront infiniment étroites; imaginons actuellement qu'on sépare le corps et la tête des voussoirs suivant la surface extrados, c'est-à-dire suivant la surface qui passe par les arêtes extérieures des plans de joint normaux; on aura isolé de chaque voussoir un prisme triangulaire ayant pour base un triangle rectangle de côtés infiniment petits, et dont l'hypoténuse répond à la face de contact de ce prisme et du voussoir. Substituons enfin aux assises horizontales de la disposition ci-dessus, une série de prismes verticaux ayant pour bases les faces horizontales des prismes triangulaires que nous venons de définir, et limités, dans le sens vertical, par un même plan horizontal dont le niveau ne soit pas inférieur à celui du point le plus

élevé de l'extrados. On obtiendra de cette manière une disposition dans laquelle chaque voussoir se trouve accompagné d'un prisme triangulaire et d'un prisme quadrangulaire, et telle que les actions exercées par le massif sur les voussoirs seront normales à l'extrados et déterminées.

En effet, dans le système que nous examinons, la force qu'un voussoir reçoit du massif est la pression normale exercée par la face du prisme triangulaire par laquelle il est en contact avec lui, en faisant toutefois abstraction du frottement : mais on pourrait dire que cette force ne se développe pas, si l'on admettait que la face hypoténuse et la face verticale du prisme triangulaire fussent en contact parfait au moment de la pose, l'une avec le voussoir, l'autre avec le prisme quadrangulaire adjacent; du moins, il n'aurait lieu qu'en vertu de la compressibilité de la matière du prisme, qui lui permettrait de descendre un tant soit peu sous l'influence du poids du prisme superposé et du glissement occasionné par l'inflexion de la voûte. Nous négligerons donc ici le frottement, ce qui revient à supposer normale l'action du prisme sur le voussoir. Déterminons maintenant l'intensité de cette action; pour cela, nous aurons à considérer l'équilibre du prisme triangulaire.

Afin de simplifier les notations, nous placerons l'axe des $x$ dans le plan horizontal qui limite les prismes quadrangulaires à leur partie supérieure.

Les forces que reçoit le prisme triangulaire sont au nombre de quatre : ce sont les trois pressions exercées perpendiculairement sur ses trois faces longitudinales, et le poids de ce prisme; nous devons faire abstraction de ce poids, qui est une force infiniment petite du deuxième ordre à cause des deux dimensions infiniment petites du prisme, et ne doit point, pour cette raison, figurer dans des équations entre les autres forces qui sont infiniment petites du premier ordre.

Soit $ds'$ le côté hypoténuse de la base du prisme triangulaire, les côtés horizontal et vertical de cette base seront $dx'$ et $dy'$; les étendues superficielles des faces correspondantes seront respecti-

vement $\lambda ds'$, $\lambda dx'$ et $\lambda dy'$. N' désignant comme ci-dessus l'intensité de la pression normale par unité de surface, l'intensité de la pression exercée par le voussoir sur le prisme sera $N'\lambda ds'$, et comme cette force est dirigée du centre de courbure vers l'extrados, ses composantes horizontale et verticale seront $N'\lambda ds' \sin\alpha$ et $-N'\lambda ds' \cos\alpha$.

Soit H' la pression horizontale par unité de surface exercée par le prisme triangulaire sur la partie adjacente du massif, et que, réciproquement, celle-ci exerce sur la face verticale du précédent; la force exercée contre le prisme par la partie adjacente du massif sera $H'\lambda dy'$, et dirigée vers les $x$ négatifs, la convexité de l'élément $ds'$ étant supposée du côté des $x$ positifs.

Enfin, la face horizontale du prisme triangulaire reçoit une force verticale qui n'est autre chose que le poids du prisme quadrangulaire correspondant, ou $i\varpi y'\lambda dx'$, en désignant par $i$ le rapport de la densité du massif à celle de la voûte, de sorte que $i\varpi$ représente le poids de l'unité de volume du massif, ainsi que nous l'avons dit plus haut.

Égalons à zéro les sommes des projections horizontales et verticales des forces qui sollicitent le prisme triangulaire; nous aurons

$$N'\lambda ds' \sin\alpha - H'\lambda dy' = 0; \quad -N'\lambda ds' \cos\alpha + i\varpi y'\lambda dx' = 0,$$

ou bien

$$N' = H', \quad N' = i\varpi y';$$

ou encore

$$N' = H' = i\varpi y'. \qquad (o)$$

La pression normale N' par unité de surface se trouve ainsi déterminée; et de ce que cette pression et la pression H' ont pour valeur commune la quantité $i\varpi y'$, on en conclut que le mode de disposition des matériaux du massif dont nous nous occupons ici, donne lieu à la même distribution des pressions, que si le massif était un liquide de densité correspondante au poids $i\varpi$ de l'unité de volume.

Nous aurions pu, comme plusieurs auteurs, partir immédiatement de l'hypothèse de la fluidité; mais il nous a paru bon d'indiquer à quel mode de disposition répond cette hypothèse que nous allons adopter dans ce qui va suivre. Nous signalerons à ce sujet la tendance d'un bon nombre d'ingénieurs à remplacer généralement la disposition *en gradins* des parements extérieurs par celle résultant d'un *extrados* continu, avec assises horizontales coupées obliquement en leur intersection avec l'extrados. Cette disposition de l'appareil des têtes peut donner lieu à des pressions normales, mais leurs intensités restent indéterminées; il ne faudrait que séparer les prismes triangulaires, des assises horizontales, pour diminuer notablement l'indétermination et se rapprocher de notre disposition idéale : si l'on avait à redouter la rupture de ces prismes en leurs angles aigus, on pourrait les construire d'une matière plus résistante, et même, dans certains cas, les rattacher aux pierres supérieures, c'est-à-dire les faire alors de la même pièce que celles-ci.

On dira peut-être que, si l'on applique aux appareils consistant en assises horizontales et voussoirs *en gradins* les formules relatives à l'équilibre du système formé de prismes disposés verticalement et reposant sur des prismes triangulaires détachés des voussoirs, ou celles relatives à l'hypothèse de la fluidité des matières du massif, on ne courra aucun risque relativement à la stabilité de la construction proposée, puisque celle-ci donne lieu à des liaisons résultant du croisement des pierres des assises horizontales, que ne présente pas la disposition du massif en prismes verticaux, et que, d'autre part, le passage de l'état fluide à l'état solide établit des liaisons favorables à la stabilité, et sur lesquelles on n'a pas compté. Nous n'invoquerons point ces raisonnements, qui sont plus spécieux qu'exacts, attendu que les liaisons établies dans la construction ont pour résultat précisément d'empêcher les charges de se répartir sur les reins de voûte, comme elles le feraient si ces liaisons manquaient absolument, ou dans le cas de la fluidité.

Nous avons indiqué, dans la note du n° 7, la nécessité d'assu-

rer la direction normale des pressions exercées par le massif; nous croyons donc ne pouvoir mieux faire, et sur ce point nous sommes d'accord avec de savants ingénieurs, qu'en adoptant l'hypothèse de la fluidité, et en engageant les constructeurs à se conformer, dans l'appareillage des parements extérieurs, aux conséquences de cette hypothèse, par l'adoption de dispositions propres à la réaliser, ou à en choisir qui se rapprochent le plus possible de celle que nous avons décrite, et que nous allons soumettre au calcul.

APPLICATION DES FORMULES DE L'ÉQUILIBRE AU CAS OÙ LES PRESSIONS NORMALES EXTÉRIEURES AUX VOUSSOIRS SONT PROPORTIONNELLES À LA HAUTEUR DE LA CHARGE QUI S'ÉLÈVE AU-DESSUS DE CEUX-CI.

9. Nous partirons de la valeur de N′ obtenue dans le numéro précédent, et qui donne

$$\frac{N'}{\varpi} = iy'.$$

En substituant cette valeur dans les deux premières équations ($l$), on a

$$d.\mu \cos\alpha = -\frac{iy'}{e}\,dy',$$

$$d.\mu \sin\alpha = +\frac{iy'}{e}\,dx' + \left(1 - \frac{1}{3}\frac{e}{\rho'}\right)ds'.$$

Quant à l'équation ($m$), elle reste la même,

$$\mu - \mu_0 = y' - h - \frac{1}{3}e(1 - \cos\alpha),$$

et l'équation ($n$) devient

$$\rho' = e\,\frac{\mu_0 + y' - h - \frac{1}{3}e(1 - 2\cos\alpha)}{iy' + e\cos\alpha}. \qquad (p)$$

Cette expression du rayon de courbure de l'extrados offre un moyen très-simple de construire cette courbe : nous reviendrons

plus tard sur ce sujet. Nous allons maintenant nous occuper de l'intégration des équations différentielles ci-dessus, ou mieux de la première d'entre elles, comme plus simple, ce qui suffira, puisque la valeur de $\mu$ résulte d'une intégration effectuée précédemment.

On obtient immédiatement, en intégrant la première de ces équations, à partir des limites $\mu_0$, 1 et $h$ relatives à $\mu$, $\cos\alpha$ et $y'$,

$$\mu_0 - \mu \cos\alpha = \frac{i}{2e}(y'^2 - h^2):$$

pour éliminer $\mu$, multiplions par $\cos\alpha$ l'équation qui donne la valeur de $\mu - \mu_0$, et ajoutons membre à membre avec celle-ci; il viendra

$$u_0(1-\cos\alpha) = (y'-h)\cos\alpha - \frac{1}{3}e(1-\cos\alpha)\cos\alpha + \frac{i}{2e}(y'^2-h^2). \quad (q)$$

En exprimant dans cette équation $\cos\alpha$ en fonction de $\tang\alpha$ dont la valeur est $\frac{dy'}{dx'}$, on aurait l'équation différentielle de la courbe extrados, qui semble présenter, pour l'intégration, plus de facilité que l'équation différentielle de l'intrados; mais il convient mieux d'obtenir l'équation de l'intrados (*), et dans ce but nous ne nous laisserons point arrêter par des difficultés qui sont plutôt apparentes que réelles.

Pour passer de l'équation $(q)$ à celle relative à l'intrados, il suffit de remplacer $y'$ par sa valeur en fonction de $y''$; en effet, $\cos\alpha$ conserve la même valeur pour les points des trois courbes situés sur une même normale à l'extrados, ces courbes étant parallèles en vertu de la constance de $\frac{1}{2}e$. Or les coordonnées $y'$ et $y''$ ne diffèrent que d'une quantité égale à la projection verticale de $e$; on a donc

$$y' = y'' - e\cos\alpha:$$

(*) Nous voulons parler ici de l'*intrados fictif*, que nous désignerons simplement par la dénomination d'intrados, à moins que nous ne prévenions du contraire.

nous déduirons de cette équation la valeur initiale de $y''$, en faisant à la fois $y' = h$ et $\alpha = 0$; soit $h''$ cette valeur de $y''$, il vient

$$h = h'' - e, \qquad (r)$$

équation qui, combinée avec la précédente par voie d'addition et de soustraction, donne

$$y' + h = y'' + h'' - e(1 + \cos\alpha),$$
$$y' - h = y'' - h'' + e(1 - \cos\alpha);$$

multipliant celles-ci membre à membre, il vient

$$y'^2 - h^2 = y''^2 - h''^2 - 2e(y''\cos\alpha - h'') - e^2(1 - \cos^2\alpha);$$

substituant, enfin, cette valeur et la précédente dans l'équation $(q)$, nous aurons

$$\mu_0(1 - \cos\alpha) = (y'' - h'')\cos\alpha + \frac{2}{3}e(1 - \cos\alpha)\cos\alpha$$
$$+ \frac{i}{2e}(y''^2 - h''^2) - i(y''\cos\alpha - h'') - \frac{ie}{2}(1 - \cos^2\alpha).$$

C'est ici le lieu de remarquer que si l'on considère la quantité $e$ comme étant du premier ordre de petitesse par rapport aux rayons de courbure, ou aux coordonnées que l'on suppose de même ordre, la quantité $\mu_0$ est du premier ordre de grandeur par rapport à ces dernières : en effet, le deuxième membre de cette équation ne contient que deux termes ayant $e$ en dénominateur, et qui sont pour cela du premier ordre de grandeur, réunis sous la forme $\frac{i}{2e}(y''^2 - h''^2)$; la différence de ces termes reste en général d'un ordre de grandeur supérieur à celui des coordonnées, puisque le facteur de cette différence $y'' - h''$ est en général d'un ordre de grandeur plus élevé que $e$ : il faut donc que le deuxième membre, et par suite le premier, soient du premier ordre de grandeur, généralement. On observera que si, vers le sommet de

l'intrados, $y'' - h''$ devient très-petit et même nul, le facteur $1 - \cos\alpha$ devient nul en même temps, et l'ordre de $\mu_0$ reste indéterminé vers le sommet, d'après l'équation précédente; mais l'expression $(p)$ de $\rho'$ montre que le produit de $e$ par $\mu_0$ est constamment égal au produit de quantités de l'ordre des coordonnées. Nous sommes donc autorisé à regarder $\mu_0$ comme étant du premier ordre de grandeur.

Posons, pour abréger et simplifier les discussions,

$$q^2 = \frac{2e\mu_0}{i}; \qquad (s)$$

la quantité $q$ sera, d'après ce qui vient d'être dit, de l'ordre de grandeur des coordonnées et des rayons de courbure. Multiplions l'équation ci-dessus par $\frac{1}{\mu_0}$ ou par sa valeur $\frac{2e}{iq^2}$, il viendra

$$1 - \cos\alpha = \frac{y''^2 - h''^2}{q^2} + \frac{2e}{iq^2}(y'' - h'')\cos\alpha + \frac{4e^2}{3iq^2}(1 - \cos\alpha)\cos\alpha$$
$$- \frac{2e}{q^2}(y''\cos\alpha - h'') - \frac{e^2}{q^2}(1 - \cos^2\alpha).$$

Cette équation est du deuxième degré par rapport à $\cos\alpha$; mais observons que $\cos^2\alpha$ n'affecte que des termes du deuxième ordre, de sorte que si, comme nous sommes convenu de le faire, nous négligeons ceux du troisième, il suffira ici d'y substituer à $\cos\alpha$ et à $1 - \cos\alpha$, leurs valeurs obtenues en négligeant ceux du premier. Or la valeur de $1 - \cos\alpha$ est $\frac{y''^2 - h''^2}{q^2}$ aux termes près du premier ordre, d'après l'équation précédente; d'où résulte pour la valeur de $\cos\alpha$, au même degré d'approximation, $1 - \frac{y''^2 - h''^2}{q^2}$: nous pourrons donc, en ne négligeant que les termes du troisième ordre, mettre le troisième terme du second membre sous la forme

$$\frac{4e^2}{3iq^2}\,\frac{y''^2 - h''^2}{q^2}\cos\alpha,$$

et écrire le dernier terme de ce membre ainsi qu'il suit :

$$-\frac{e^2}{q^2}+\frac{e^2}{q^2}\left(1-\frac{y''^2-h''^2}{q^2}\right)\cos\alpha.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation précédente deviendra

$$1-\cos\alpha=\frac{y''^2-h''^2+2h''e-e^2}{q^2}+\left[\frac{2e}{iq^2}(y''-h'')-\frac{2e}{q^2}y''\right.$$
$$\left.+\frac{4e^2}{3iq^2}\frac{y''^2-h''^2}{q^2}+\frac{e^2}{q^2}-\frac{e^2}{q^2}\frac{y''^2-h''^2}{q^2}\right]\cos\alpha;$$

on en déduit

$$\cos\alpha\left\{1+\frac{2e}{iq^2}(y''-h'')-\frac{2e}{q^2}y''+\frac{e^2}{q^2}+\frac{e^2}{iq^2}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''^2-h''^2}{q^2}\right\}$$
$$=1-\frac{y''^2-h''^2+2h''e-e^2}{q^2},\quad (t)$$

ou bien en ajoutant et retranchant $\frac{2e}{q^2}h''$ dans la parenthèse du premier membre, et tirant la valeur de $\cos\alpha$,

$$\cos\alpha=\frac{1-\frac{y''^2-h''^2+e(2h''-e)}{q^2}}{1-\frac{e(2h''-e)}{q^2}+\frac{2e}{iq^2}(1-i)(y''-h'')+\frac{e^2}{iq^2}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''^2-h''^2}{q^2}}.\quad (u)$$

Telle est l'équation différentielle de l'intrados qu'il reste à intégrer, en y supposant $\cos\alpha$ exprimé en fonction de $\tang\alpha$ ou de $\frac{dy''}{dx''}$.

10. Avant de procéder à l'intégration de cette équation, nous aurons à exprimer les quantités $\mu$ et $\rho''$, puis ensuite $\varepsilon$ ou $\delta$, en fonction des ordonnées de l'intrados.

L'équation $(m)$ donne immédiatement, au moyen de la valeur ci-dessus de $y'-h$,

$$\mu-\mu_0=y''-h''+\frac{2}{3}e(1-\cos\alpha);$$

et, si l'on observe que $e$ est du deuxième ordre par rapport à $\mu$,

on aura une expression de $\mu$ exacte jusque dans les termes du deuxième ordre relativement à cette quantité, en mettant à la place du facteur $1 - \cos\alpha$ la valeur obtenue plus haut en négligeant les termes du premier ordre; le dernier terme du second membre de l'équation précédente pourra s'écrire $\frac{2}{3} e \frac{y''^2 - h''^2}{q^2}$, ou, en vertu de l'équation $(s)$, $\frac{i}{3\mu_0}(y''^2 - h''^2)$ : il vient donc

$$\mu - \mu_0 = y'' - h'' + \frac{i}{3\mu_0}(y''^2 - h''^2). \qquad (v)$$

Quant à l'expression du rayon de courbure, observons qu'en vertu du parallélisme des trois courbes, on a

$$\rho' = \rho'' + e;$$

substituant cette valeur et celle de $y'$ dans l'équation $(p)$ dont nous chasserons les dénominateurs, nous aurons

$$(\rho'' + e)\,[iy'' + (1 - i)e\cos\alpha] = e\mu_0 + e(y'' - h'') + e^2(1 - \cos\alpha) - \frac{1}{3}e^2(1 - 2\cos\alpha);$$

divisant tout par $i$, et ayant égard à la relation $(s)$, puis effectuant les réductions qui se présentent, il viendra d'abord

$$\rho''\left(y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\alpha\right) + ey'' + \frac{1-i}{i}e^2\cos\alpha = \frac{q^2}{2} + \frac{e}{i}(y'' - h'') + \frac{2}{3}\frac{e^2}{i}(1 - \cos\alpha) + \frac{1}{3i}e^2\cos\alpha,$$

puis ensuite

$$\rho''\left(y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\alpha\right) = \frac{1}{2}q^2 - eh'' + \frac{2}{3}\frac{e^2}{i} + \frac{1-i}{i}e(y'' - h'') - \frac{1}{i}\left(\frac{4}{3} - i\right)e^2\cos\alpha,$$

et enfin

$$\rho'' = \frac{1}{2}\,\frac{q^2 - 2eh'' + \frac{4}{3}\frac{e^2}{i} + 2\frac{1-i}{i}e(y'' - h'') - \frac{2}{i}\left(\frac{4}{3} - i\right)e^2\cos\alpha}{y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\alpha}. \qquad (w)$$

Nous reviendrons plus loin sur cette expression du rayon de courbure, et nous indiquerons le parti qu'on en peut tirer pour substituer à l'emploi de l'intégrale de l'équation ($u$), celui des constructions graphiques. Actuellement, nous nous bornerons à opérer la vérification de cette expression, en observant qu'on doit pouvoir la tirer de l'équation ($u$) par la différentiation.

En effet, différentions cette équation en y faisant préalablement disparaître le dénominateur du deuxième membre, il viendra

$$-\left[1-\frac{e(2h''+e)}{q^2}+\frac{2e}{iq^2}(1-i)(y''-h'')+\frac{e^2}{iq^2}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''^2-h''^2}{q^2}\right]\sin\alpha\, d\alpha$$
$$+\cos\alpha\left[\frac{2e}{iq^2}(1-i)+\frac{2e^2}{iq^2}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''}{q^2}\right]dy''=-\frac{2y''}{q^2}\,dy''.$$

Or, on a $dy''=\sin\alpha\, ds''=\rho''\sin\alpha\, d\alpha$; substituant cette dernière valeur à la place de $dy''$, et supprimant ensuite le facteur commun $\sin\alpha\, d\alpha$, on aura

$$\frac{2}{q^2}\rho''\left[y''+\frac{1-i}{i}e\cos\alpha+\frac{e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''}{q^2}\cos\alpha\right]=1-\frac{2eh''}{q^2}+\frac{e^2}{q^2}$$
$$+\frac{2(1-i)}{i}\frac{e(y''-h'')}{q^2}+\frac{e^2}{iq^2}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''^2-h''^2}{q^2}.$$

Nous pouvons mettre dans le dernier terme du second nombre au lieu de $\frac{y''^2-h''^2}{q^2}$, la quantité $1-\cos\alpha$, d'après ce qui a été dit ci-dessus; puis, en transposant le dernier terme de la parenthèse du premier membre, et multipliant par $q^2$, nous aurons

$$2\rho''\left[y''+\frac{1-i}{i}e\cos\alpha\right]=q^2-2eh''+e^2+\frac{2(1-i)}{i}e(y''-h'')$$
$$+\frac{e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)(1-\cos\alpha)-\frac{2e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{\rho''y''}{q^2}\cos\alpha.$$

Or le dernier terme du second membre étant du deuxième

ordre, on peut mettre à la place de $\rho''$, sa valeur obtenue en négligeant les termes du premier, et l'équation donne ici $2\rho''y'' = q^2$, en négligeant ces termes; il en résulte que le dernier se réduit à $-\frac{e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)\cos\alpha$, et, par suite, la somme des deux derniers à $\frac{e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)-\frac{2e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)\cos\alpha$. Mettant ces valeurs, achevant la réduction des termes en $e^2$, puis tirant la valeur de $\rho''$, il vient

$$\rho'' = \frac{1}{2}\,\frac{q^2 - 2eh'' + \frac{4}{3}\frac{e^2}{i} + 2\frac{1-i}{i}e(y''-h'') - \frac{2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)e^2\cos\alpha}{y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\alpha},$$

valeur identique avec celle obtenue précédemment.

Nous pouvons déjà remarquer que, dans l'hypothèse $i = 1$, cette expression devient plus simple que celle $(p)$ du rayon de courbure de l'extrados. On pourra encore observer que, dans la même hypothèse, le second membre de l'équation $(u)$ ne contient que des puissances paires de $y''$, d'où il est facile de conclure que la courbe qu'elle représente devient alors symétrique par rapport à l'axe des $x$. Le numérateur de la valeur de $\rho''$ conserve le même signe pour des valeurs égales et de signe contraire de $y''$, tandis que le dénominateur change de signe. Le rayon de courbure prend alors des valeurs égales et de signe contraire, comme cela doit être, puisque les courbures en deux points symétriquement placés par rapport à l'axe des $x$ sont nécessairement de sens contraires.

Actuellement la détermination de la distance $\delta$ du centre de gravité au milieu de l'épaisseur du voussoir devient très-simple: en effet, nous déduisons de l'équation $(h)$

$$\delta = \frac{1}{12}\frac{e^2}{\rho'};$$

on peut substituer ici $\rho''$ à la place de $\rho'$, puisque leur différence est égale à $e$, et qu'il n'en peut résulter qu'une erreur du troisième ordre que nous négligeons; de plus, on peut à $\rho''$ substi-

tuer sa valeur, en y négligeant les termes du premier ordre, laquelle se réduit à $\frac{q^2}{2y''}$; alors il vient simplement

$$\delta = \frac{1}{6}\frac{e^2}{q^2}y'' = \frac{i}{12}\frac{e}{\mu_0}y'', \qquad (x)$$

en ayant égard à la relation $(s)$.

L'expression $(i)$ de l'épaisseur variable $\varepsilon$ se change de même en

$$\varepsilon = e + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'' = e + \frac{i}{6}\frac{e}{\mu_0}y''. \qquad (y)$$

Dans le système que nous considérons, les épaisseurs croissent donc proportionnellement aux ordonnées de l'intrados, et la constante $e$ est l'épaisseur qui aurait lieu au point où l'intrados couperait l'axe des $x$ si cette intersection était possible.

### DÉVELOPPEMENT DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE L'INTRADOS.

11. Nous avons à former l'expression du coefficient différentiel $\frac{dy''}{dx''}$, dont la valeur en fonction de $\cos\alpha$ est

$$\frac{dy''}{dx''} = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}:$$

on a d'abord, en renversant les deux membres de l'équation $(u)$,

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1 - \frac{e(2h''-e)}{q^2} + \frac{2(1-i)}{i}\frac{e(y''-h'')}{q^2} + \frac{1}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{e^2(y''^2-h''^2)}{q^4}}{1 - \frac{y''^2 - h''^2 + e(2h''-e)}{q^2}};$$

élevant au carré les deux membres de cette équation, retranchant l'unité, et réduisant ensuite au même dénominateur, on aura, en supprimant les termes qui se détruisent, et négligeant ceux du troisième ordre,

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \text{ ou } \frac{dy''^2}{dx''^2} = \frac{1}{\left[1 - \frac{y''^2 - (h''-e)^2}{q^2}\right]^2} \left\{ 2\,\frac{y''^2 - h''^2}{q^2} - \frac{(y''^2 - h''^2)^2}{q^4} \right.$$

$$+ \frac{4(1-i)}{i}\,\frac{e(y''-h'')}{q^2} - \frac{4\,e\,h''\,(y''^2 - h''^2)}{q^4}$$

$$\left. + \frac{8}{3i}\,\frac{e^2(y''^2 - h''^2)}{q^4} - \frac{8(1-i)}{i}\,\frac{e^2\,h''\,(y''-h'')}{q^4} + \frac{4(1-i)^2}{i^2}\,\frac{e^2\,(y''-h'')^2}{q^4} \right\}.$$

Multipliant haut et bas par $q^4$ et mettant le facteur commun $y'' - h''$ en évidence, si, de plus, on pose

$$R^2 = (y'' - h'') \left\{ [2q^2 - (y''^2 - h''^2)]\,(y'' + h'') + 4\,\frac{1-i}{i}\,eq^2 \right.$$

$$- 4\,eh''\,(y'' + h'') + \frac{8}{3i}\,e^2\,(y'' + h'')$$

$$\left. - 8\,\frac{1-i}{i}\,e^2\,h'' + 4\,\frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2\,(y'' - h'') \right\}, \quad (z)$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{dy''^2}{dx''^2} = \frac{R^2}{[q^2 + (h''-e)^2 - y''^2]^2}.$$

et l'on en tirera

$$dx'' = \pm\,\frac{q^2 + (h''-e)^2 - y''^2}{R}\,dy''. \qquad (a')$$

Telle est l'équation qu'il reste à intégrer.

On sait que l'intégration d'une expression de cette espèce, dans laquelle $R^2$ est un polynôme du quatrième degré en $y''$, consiste dans la réduction aux fonctions elliptiques. Sous la forme $(a')$, l'intégration n'est pas même ramenée aux quadratures, à cause de la valeur infinie que prend le coefficient de $dy''$, quand $y''$ est égal à $h''$, et c'est le cas qui se présente pour le premier élément de l'intégrale. Or la réduction aux fonctions elliptiques exige la décomposition du polynôme $R^2$ en facteurs du premier degré, et cette décomposition nous présentera une circonstance favorable à la

réduction de l'intégrale aux quadratures; nous commencerons donc par opérer la décomposition du polynôme $R^2$ en ses facteurs du premier degré.

DÉCOMPOSITION DU POLYNÔME $R^2$ EN SES FACTEURS DU PREMIER DEGRÉ. LIMITES DE LA COURBE INTRADOS DANS LE SENS DES $y$.

12. La question dont il s'agit se résout ordinairement par la détermination des racines du polynôme $R^2$ égalé à zéro. Dans le cas actuel, l'un des facteurs $y'' - h''$ est déjà connu, et il ne resterait plus qu'à résoudre une équation du troisième degré; mais la forme des racines étant trop compliquée, lorsqu'on fait usage de la formule de Cardan, pour que nous songions à appliquer cette dernière, et l'exactitude rigoureuse de la valeur des racines n'étant point nécessaire ici, puisque la valeur du polynôme n'est exacte que jusqu'aux termes du deuxième ordre inclusivement, nous devrons recourir à un autre procédé, celui de la réduction des racines en séries ordonnées suivant les puissances de $e$, dans lesquelles nous négligerons les termes d'ordres supérieurs au second.

Nous commencerons par déterminer les parties de chacun des facteurs du polynôme du troisième degré, qui sont indépendantes des termes du premier et du second ordre : pour cela nous rechercherons les facteurs du polynôme en faisant abstraction de ces termes, dont la suppression le réduit à

$$(y'' + h'')\,[2q^2 - (y''^2 - h''^2)].$$

L'un des facteurs du premier degré est en évidence; en égalant à zéro l'autre facteur, il vient

$$y''^2 = h''^2 + 2q^2.$$

Posons

$$H^2 = h''^2 + 2q^2, \qquad (b')$$

on tirera de l'équation précédente,

$$y'' = \pm H,$$

de sorte que les deux facteurs cherchés seront $H + y''$ et $H - y''$ (nous changeons ici le signe de la différence $y'' - H$ à cause du signe — qui affecte $y''^2$ dans le facteur du deuxième degré). Le produit des trois facteurs, en négligeant les termes du premier et du deuxième ordre, est donc

$$(y'' + h'')\,(H + y'')\,(H - y'').$$

Désignons maintenant par $\alpha' e$, $\beta' e$, $\gamma' e$ les termes du premier ordre qui doivent entrer dans la composition des facteurs que nous nous proposons de déterminer, de telle sorte que le produit de ces facteurs soit, à des termes près du deuxième ordre,

$$(y'' + h'' + \alpha' e)\,(H + y'' + \beta' e)\,(H - y'' + \gamma' e);$$

il s'agit de déterminer les valeurs de $\alpha'$, $\beta'$ et $\gamma'$ de manière que les termes du premier ordre provenant du produit de ces facteurs soient identiques avec ceux qui font partie du polynôme proposé, quel que soit $y''$. Quant aux termes de l'ordre de $y''$, il n'y a point à s'en occuper, puisqu'ils sont nécessairement identiques avec ceux du polynôme, en vertu de la décomposition que nous venons d'effectuer. Formons donc l'expression des termes du premier ordre que peut fournir le produit des facteurs ci-dessus : on aperçoit immédiatement que ces termes ne peuvent provenir que du produit du terme du premier ordre de chacun des facteurs, par le produit des termes des deux autres facteurs qui sont de l'ordre de $y''$. On a de la sorte, pour les termes dont il s'agit,

$$\alpha' e\,(H + y'')\,(H - y'') + \beta' e\,(y'' + h'')\,(H - y'') + \gamma' e\,(y'' + h'')\,(H + y'').$$

Or la somme de ces termes devant être égale, pour toute valeur de $y''$, à la somme des termes du premier ordre qui entrent dans la composition du polynôme du troisième degré, laquelle est

$$4\,\frac{1-i}{i}\,eq^2 - 4\,eh''\,(y'' + h''),$$

nous allons égaler les coefficients des mêmes puissances de $y''$ dans ces deux sommes, et en faisant abstraction du facteur commun $e$, nous aurons les trois équations de condition

$$\alpha' \mathrm{H}^2 + (\beta' + \gamma') \mathrm{H} h'' = 4 \frac{1-i}{i} q^2 - 4 h''^2,$$
$$(\beta' + \gamma') \mathrm{H} - (\beta' - \gamma') h'' = - 4 h'',$$
$$- \alpha' - \beta' + \gamma' = 0.$$

La dernière de ces équations donne

$$\alpha' = - (\beta' - \gamma');$$

substituant cette valeur dans la première et multipliant la seconde par $h''$, il vient

$$(\beta' + \gamma') \mathrm{H} h'' - (\beta' - \gamma') \mathrm{H}^2 = 4 \frac{1-i}{i} q^2 - 4 h''^2,$$
$$(\beta' + \gamma') \mathrm{H} h'' - (\beta' - \gamma') h''^2 = - 4 h''^2;$$

puis en soustrayant,

$$- (\beta' - \gamma') (\mathrm{H}^2 - h''^2) = 4 \frac{1-i}{i} q^2;$$

mais on a $(b')$

$$\mathrm{H}^2 - h''^2 = 2 q^2,$$

il en résulte

$$\beta' - \gamma' = - 2 \frac{1-i}{i},$$

et, en substituant cette valeur dans la deuxième des équations de condition,

$$(\beta' + \gamma') \mathrm{H} + 2 \frac{1-i}{i} h'' = - 4 h'',$$

ou

$$(\beta' + \gamma') \mathrm{H} = - \frac{2}{i} (1 + i) h'';$$

on en tire

$$\beta' + \gamma' = - \frac{2}{i} (1 + i) \frac{h''}{\mathrm{H}}.$$

En ayant égard à la valeur ci-dessus de $\alpha'$ en $\beta'$ et $\gamma'$, puis se servant des expressions de la différence et de la somme de ces deux dernières quantités que nous venons de trouver, on formera les valeurs suivantes:

$$\alpha' = 2\,\frac{1-i}{i},$$

$$\beta' = -\frac{1-i}{i} - \frac{1+i}{i}\,\frac{h''}{H},$$

$$\gamma' = +\frac{1-i}{i} - \frac{1+i}{i}\,\frac{h''}{H}.$$

Actuellement, désignons les termes du deuxième ordre respectivement par $\alpha'' e^2$, $\beta'' e^2$, $\gamma'' e^2$, de sorte que le produit des trois facteurs soit

$$(y'' + h'' + \alpha' e + \alpha'' e^2)\,(H + y'' + \beta' e + \beta'' e^2)\,(H - y'' + \gamma' e + \gamma'' e^2);$$

nous aurons simplement à identifier les termes du deuxième ordre fournis par ce produit, avec ceux du polynôme du troisième degré, puisque ceux du premier et ceux de l'ordre de $y''$ se trouvent identiques en vertu des calculs précédents. Remarquons à ce sujet que les termes du deuxième ordre de ce produit proviendront d'abord du produit de chaque terme de cet ordre faisant partie d'un facteur, par le produit des deux autres facteurs débarrassés de leurs termes du premier et du deuxième ordre; puis ensuite du produit de deux termes du premier ordre contenus dans deux facteurs différents, par l'autre facteur débarrassé de ses termes du premier et du deuxième ordre. Cette remarque nous permettra d'écrire immédiatement les termes du deuxième ordre dont il s'agit, et en les égalant à ceux contenus dans le polynôme du troisième degré, on aura l'équation

$$\left.\begin{array}{l} \alpha'' e^2 (H^2 - y''^2) + \beta'' e^2 (y'' + h'')(H - y'') + \gamma'' e^2 (y'' + h'')(H + y'') \\ + \alpha' \beta' e^2 (H - y'') + \alpha' \gamma' e^2 (H + y'') + \beta' \gamma' e^2 (y'' + h'') \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{8}{3i}\, e^2 (y'' + h'') - 8\,\frac{1-i}{i}\, e^2 h'' \\ + 4\,\frac{(1-i)^2}{i^2}\, e^2 (y'' - h''), \end{array}\right.$$

qui se décompose, en égalant séparément les coefficients des mêmes puissances de $y''$, en les trois équations suivantes :

$$\alpha''H^2 + (\beta'' + \gamma'')Hh'' + \alpha'(\beta' + \gamma')H + \beta'\gamma'h'' = \frac{8}{3i}h'' - 8\frac{1-i}{i}h'' - 4\frac{(1-i)^2}{i^2}h'',$$

$$(\beta'' + \gamma'')H - (\beta'' - \gamma'')h'' - \alpha'(\beta' - \gamma') + \beta'\gamma' = \frac{8}{3i} + 4\frac{(1-i)^2}{i^2},$$

$$-\alpha'' - \beta'' + \gamma'' = 0.$$

La dernière de ces équations donne

$$\alpha'' = -(\beta'' - \gamma'');$$

substituant cette valeur dans la première, multipliant la deuxième par $h''$, et transposant les termes connus dans les seconds membres, il viendra

$$(\beta'' + \gamma'')Hh'' - (\beta'' - \gamma'')H^2 = -\alpha'(\beta' + \gamma')H - \beta'\gamma'h'' + \frac{8h''}{3i} - 4\frac{(1-i)^2}{i^2}h'' - 8\frac{1-i}{i}h'',$$

$$(\beta'' + \gamma'')Hh'' - (\beta'' - \gamma'')h''^2 = +\alpha'(\beta' - \gamma')h'' - \beta'\gamma'h'' + \frac{8h''}{3i} + 4\frac{(1-i)^2}{i^2}h'';$$

soustrayons la première de la seconde, nous aurons

$$(\beta'' - \gamma'')(H^2 - h''^2) = \alpha'[(\beta' + \gamma')H + (\beta' - \gamma')h''] + 8\frac{(1-i)^2}{i^2}h'' + 8\frac{1-i}{i}h'';$$

mais nous avons trouvé plus haut les valeurs de $(\beta' + \gamma')H$ et $\beta' - \gamma'$; elles donnent immédiatement

$$(\beta' + \gamma')H + (\beta' - \gamma')h'' = -\frac{4}{i}h'':$$

au moyen de cette relation et de la valeur de $\alpha'$, le second membre de l'équation précédente se réduit à

$$-\frac{8}{i^2}(1-i)h'' + \frac{8}{i^2}(1-i)^2h'' + 8\frac{1-i}{i}h'' = 0;$$

cette même équation donne par suite

$$\beta'' - \gamma'' = 0.$$

Reprenant la deuxième équation de condition, nous aurons, en vertu de $\beta'' - \gamma'' = 0$ et des valeurs déterminées précédemment de $\alpha'$, $\beta' - \gamma'$, $\beta'$ et $\gamma'$,

$$(\beta'' + \gamma'')\,\mathrm{H} = \frac{(1-i)^2}{i^2} - \frac{(1+i)^2}{i^2}\frac{h''^2}{\mathrm{H}^2} + \frac{8}{3i};$$

d'où, en ayant égard à la même équation $\beta'' - \gamma'' = 0$,

$$\beta'' = \gamma'' = \frac{1}{2i^2\mathrm{H}}\left[1 + \frac{2}{3}i + i^2 - (1+i)^2\frac{h''^2}{\mathrm{H}^2}\right].$$

En vertu de cette égalité des valeurs de $\beta''$ et $\gamma''$, celle de $\alpha''$ se réduit à zéro,

$$\alpha'' = 0.$$

Dans le but de simplifier les calculs qui vont suivre, nous donnerons aux expressions de $\beta''$ et $\gamma''$ une autre forme. Faisons disparaître le dénominateur $\mathrm{H}^2$ de la parenthèse; en tenant compte de la relation $(b')$, nous aurons

$$\beta'' = \gamma'' = \frac{1}{2i^2\mathrm{H}^2}\left[\left(1 + \frac{2}{3}i + i^2\right)(h''^2 + 2q^2) - (1+i)^2 h''^2\right];$$

réunissons les termes affectés des facteurs $h''^2$ et $q^2$, il viendra finalement

$$\beta'' = \gamma'' = \frac{1}{i^2\mathrm{H}^2}\left[\left(1 + \frac{2}{3}i + i^2\right)q^2 - \frac{2}{3}ih''^2\right].$$

Au moyen des valeurs de $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ que nous venons de déterminer, les trois facteurs dont nous proposions de former les expressions en négligeant les termes des ordres supérieurs au second, deviennent respectivement

$$y'' + h'' + 2\frac{1-i}{i}e,$$

$$\mathrm{H} - \frac{1-i}{i}e - \frac{1+i}{i}\frac{h''}{\mathrm{H}}e + \frac{1}{i^2\mathrm{H}^2}\left[\left(1 + \frac{2}{3}i + i^2\right)q^2 - \frac{2}{3}ih''^2\right]e^2 + y'',$$

$$\mathrm{H} + \frac{1-i}{i}e - \frac{1+i}{i}\frac{h''}{\mathrm{H}}e + \frac{1}{i^2\mathrm{H}^2}\left[\left(1 + \frac{2}{3}i + i^2\right)q^2 - \frac{2}{3}ih''^2\right]e^2 - y''.$$

Posons pour abréger

$$\Theta = \mathrm{H} - \frac{1+i}{i}\frac{h''}{\mathrm{H}}e + \frac{1}{i^2\mathrm{H}^2}\left[\left(1+\frac{2}{3}i+i^2\right)q^2 - \frac{2}{3}ih''^2\right]e^2, \quad (c')$$

les deux derniers facteurs deviendront

$$\Theta + \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right), \ \Theta - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right),$$

et leur produit pourra s'écrire

$$\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right)^2;$$

de sorte que la valeur $(z)$ de $\mathrm{R}^2$ prendra la forme

$$\mathrm{R}^2 = (y'' - h'')\left(y'' + h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right)\left[\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right)^2\right]. \ (d')$$

13. Les limites de la courbe intrados dans le sens des $y$, s'obtiendront en posant $\frac{dy''}{dx''} = 0$, condition qui sera remplie, d'après l'équation $(a')$, lorsque l'on aura $\mathrm{R} = 0$. Or la décomposition que nous venons d'opérer, de la fonction $\mathrm{R}^2$ en facteurs, donne le moyen de déterminer les limites dont il s'agit, en posant chacun des facteurs égal à zéro : il en résulte, pour valeur des ordonnées maxima et minima de la courbe, les quantités suivantes, que nous disposons par ordre de grandeur,

$$-\left(\Theta - \frac{1-i}{i}e\right), \ -\left(h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right), \ +h'', \ +\left(\Theta + \frac{1-i}{i}e\right).$$

L'ordre de grandeur de ces quantités ne paraît pas évident si l'on ne remonte point aux valeurs de $\Theta$ et H en fonction de $h''$, et si l'on ne se rappelle pas que $h''$ est positif d'après la nature de la question. D'ailleurs l'ordre que nous venons d'établir est simplement subordonné aux trois conditions suivantes

$$h'' < \Theta - 3\frac{1-i}{i}e, \quad h'' + \frac{1-i}{i}e > 0, \quad h'' < \Theta + \frac{1-i}{i}e,$$

qui évidemment se réalisent dans le cas de la question qui nous occupe.

Nous allons faire voir maintenant que la courbe se compose de deux branches séparées, l'une située tout entière du côté des $y$ positifs, et comprise entre deux parallèles à l'axe des $x$ menées aux distances $h''$ et $\Theta + \frac{1-i}{i} e$, l'autre située du côté des $y$ négatifs, et comprise entre deux autres droites parallèles menées aux distances $-\left(h'' + 2\frac{1-i}{i} e\right)$ et $-\left(\Theta - \frac{1-i}{i} e\right)$.

En effet, la condition que le radical R reste réel exige que le polynôme $R^2$ soit positif. Or ce polynôme est du quatrième degré en $y''$ et le terme affecté de $y''^4$ est négatif : si l'on fait $y'' = \pm\infty$, la valeur de $R^2$ devient infinie et négative; elle ne change de signe que lorsqu'on fait décroître la valeur absolue de $y''$ en la ramenant aux limites extrêmes $-\left(\Theta - \frac{1-i}{i} e\right)$, $+\left(\Theta + \frac{1-i}{i} e\right)$. Donc la courbe ne contient aucun point situé en dehors de ces limites. La valeur de $R^2$ commence à devenir positive lorsque $y''$ atteint ces valeurs, puisqu'il n'existe pas de racines égales; et, si l'on continue de faire décroître la valeur absolue de $y''$, on voit que $R^2$ reste positif jusqu'à ce que $y''$ atteigne les valeurs où il change de signe, ce qui a lieu aux limites $-\left(h'' + 2\frac{1-i}{i} e\right)$ et $+h''$; le signe de $R^2$ se trouve changé entre ces limites et devient négatif. On doit conclure de cet examen que la courbe est composée de deux branches, l'une située entre les limites $-\left(\Theta - \frac{1-i}{i} e\right)$ et $-\left(h'' + 2\frac{1-i}{i} e\right)$, l'autre comprise entre les limites $\Theta + \frac{1-i}{i} e$ et $h''$; et qu'en outre l'espace compris entre les limites $-\left(h'' + 2\frac{1-i}{i} e\right)$ et $+h''$ n'en renferme aucun point, non plus que les espaces situés au delà des limites extrêmes.

L'équation $(a')$ fait connaître l'ordonnée du point où la tangente est parallèle à l'axe des $y$; en effet, en ce point on a $\frac{dx''}{dy''} = 0$,

et l'équation $(a')$ fournit, pour satisfaire à cette condition, la relation

$$q^2 + (h'' - e)^2 - y''^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$y'' = \pm \sqrt{q^2 + (h'' - e)^2}.$$

Les limites obtenues et la détermination des points où la tangente est verticale vont nous permettre d'aborder la discussion de la forme de la courbe, et de fixer l'usage que l'on devra faire du double signe du radical R de l'équation $(a')$. Observons qu'en vertu de ce double signe la courbe est symétrique par rapport à un axe parallèle à l'axe des $y$, dont la position ne dépend que du choix de la constante introduite par l'intégration, de sorte qu'ayant déterminé les circonstances de la forme de la courbe en ne considérant à la fois qu'un seul des deux signes, il suffira d'avoir égard à la symétrie, pour se figurer les parties de la courbe que l'on n'aura point étudiées.

Occupons-nous en premier lieu de la branche située du côté des $y$ positifs, et partons de $y'' = h''$. Supposons d'abord R positif ou considérons le signe $+$ dans l'expression $(a')$ de $dx''$. Les limites que nous avons reconnues, de la valeur de $y''$, nous obligent à faire $dy''$ positif; or le numérateur de $dx''$ est positif, tant que l'on a $y''^2 < q^2 + (h'' - e)^2$, la valeur de $x''$ croît depuis $y'' = h''$ jusqu'à $y'' = \sqrt{q^2 + (h'' - e)^2}$. A cette valeur de $y''$, le numérateur devient nul et change ensuite de signe, ce qui rend $dx''$ négatif au-delà de cette valeur; ainsi l'abscisse décroît d'abord depuis le point dont il s'agit, jusqu'à la limite $\Theta + \frac{1-i}{i} e$, de $y''$ : or cette limite ne pouvant être dépassée, il faut faire décroître $y''$, et afin que la courbe ne s'arrête point brusquement, nous devons changer le signe de R de sorte que $\frac{dy''}{R}$ se trouve encore positif. De cette manière le numérateur reste négatif, jusqu'à ce que $y''$ ait atteint dans sa décroissance la valeur $+\sqrt{q^2 + (h'' - e)^2}$; et

l'abscisse continue de diminuer jusqu'en cet endroit : mais au delà, le numérateur reprend sa valeur positive, et le rapport $\frac{dy''}{R}$ étant toujours positif, $x''$ croît de nouveau jusqu'à ce que $y''$ ait atteint la limite $h''$. Au delà de ce point, il faut faire croître $y''$, c'est-à-dire prendre $dy''$ positif et aussi le signe de R; il en résulte de nouveaux accroissements de $x''$ égaux aux précédents, pour les mêmes accroissements $dy''$ et les mêmes valeurs de $y''$. La courbe présente dès lors une reproduction périodique des mêmes formes qui lui donne quelque ressemblance avec les cycloïdes allongées.

Si l'on considère la branche située du côté des $y$ négatifs, on reconnaîtra sans peine qu'elle présente une forme tout à fait analogue à celle de l'autre branche; et cette branche serait exactement symétrique avec la première, par rapport à l'axe des $x$, si l'on avait $i = 1$. On reconnaîtra de plus que la condition de continuité dans les parties de cette branche exigera que l'on choisisse le signe de R de manière que $\frac{dy''}{R}$ reste positif comme dans la première. Et l'on conclura de cette convention que le signe de R sera nécessairement contraire dans les parties correspondantes des deux branches.

Nous nous sommes étendu longuement sur la discussion de la forme des deux branches de la courbe, quoique nous ne devions utiliser qu'une faible partie de l'une d'elles; mais nous avions à fixer relativement aux signes de $\frac{dy''}{R}$ et de R des conventions dont l'une nous servira pour l'intégration de l'équation $(a')$, et l'autre, pour la vérification des coefficients que nous présentera l'intégrale de cette expression.

### RÉDUCTION DE L'INTÉGRALE DE L'EXPRESSION $(a')$ AUX QUADRATURES.

14. Nous avons reconnu, après avoir établi cette expression, l'impossibilité de lui appliquer la méthode des quadratures, et nous en avons indiqué la cause, dans la présence du facteur $\sqrt{y'' - h''}$

au dénominateur de la valeur de $dx''$. Nous aurons recours au procédé de l'intégration par parties, pour faire disparaître cette difficulté, en faisant passer le facteur dont il s'agit du dénominateur au numérateur.

Posons

$$V^2 = \left(y'' + h'' + 2\,\frac{1-i}{i}\,e\right)\left(\Theta^2 - (y'' - \frac{1-i}{i}\,e)^2\right),$$

la valeur de R deviendra

$$R = V\sqrt{y'' - h''},$$

et l'équation $(a')$ pourra s'écrire

$$\pm\, dx'' = \frac{q^2 - 2\,h''e + e^2 - (y''^2 - h''^2)}{V\sqrt{y'' - h''}}\,dy''.$$

En intégrant et séparant les intégrales, il vient

$$\pm\, x'' = (q^2 - 2\,h''e + e^2)\int\frac{dy''}{V\sqrt{y'' - h''}} - \int\frac{(y'' + h'')\sqrt{y'' - h''}}{V}\,dy''.$$

Effectuons la première intégration par parties, nous aurons

$$\int\frac{dy''}{V\sqrt{y'' - h''}} = \frac{2\sqrt{y'' - h''}}{V} - 2\int\sqrt{y'' - h''}\,d\,\frac{1}{V}.$$

Or on a

$$d\,\frac{1}{V} = -\,\frac{dV}{V^2} = -\,\frac{2V\,dV}{2V^3} = -\,\frac{1}{2V}\,\frac{d.V^2}{V^2}.$$

D'un autre côté, en appliquant à l'expression de $V^2$ la différentiation logarithmique, il vient

$$\frac{d.V^2}{V^2} = \frac{dy''}{y'' + h'' + 2\,\frac{1-i}{i}\,e} - \frac{2\left(y'' - \frac{1-i}{i}\,e\right)dy''}{\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}\,e\right)^2},$$

et, par suite,

$$d\frac{1}{V} = -\frac{1}{2}\frac{dy''}{\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2}}$$

$$+\frac{\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)dy''}{\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\sqrt{y''+h''+2\frac{1-i}{i}e}}.$$

Au moyen de ces expressions, on aura finalement

$$\pm x'' = 2\,(q^2-2\,h''e+e^2)\frac{\sqrt{y''-h''}}{\sqrt{\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2\right]}}$$

$$+(q^2-2\,h''e+e^2)\int\frac{\sqrt{y''-h''}\,dy''}{\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2}}$$

$$-2\,(q^2-2\,h''e+e^2)\int\frac{\sqrt{y''-h''}\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)dy''}{\sqrt{y''+h''+2\frac{1-i}{i}e}\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\int\frac{\sqrt{y''-h''}\,(y''+h'')\,dy''}{\sqrt{\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2\right]}}.$$

On devra remarquer qu'aucun des éléments de ces intégrales ne devient infini pour des valeurs de $y''$ comprises entre $h''$ et $\sqrt{q^2+(h''-e)^2}$, les seules dont nous ayons à faire usage, et que, par conséquent, ces intégrales sont propres à recevoir l'application de la méthode des quadratures. Mais nous renoncerons à faire usage de l'expression précédente de $x''$, qui serait plus longue à calculer que celle que nous obtiendrons plus loin, dût-on, dans celle-ci, calculer par quadratures les deux fonctions elliptiques de première et deuxième espèce qu'elle renferme.

RÉDUCTION AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES, DE L'INTÉGRALE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA COURBE INTRADOS (*).

15. Nous mettrons d'abord la valeur de $R^2$ sous la forme d'un carré parfait, en posant

$$(y'' - h'')\left(y'' + h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right) = \left[\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right)^2\right]z^2, \quad (e')$$

relation de laquelle on tire

$$z = \pm\sqrt{\frac{(y'' - h'')\left(y'' + h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right)}{\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right)^2}},$$

et qui donne, en effet, pour la valeur de $R^2$,

$$R^2 = \left[\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right)^2\right]^2 z^2;$$

d'où

$$R = \left[\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right)^2\right]z. \quad (f')$$

Nous supposons ici R susceptible de prendre le double signe; et comme $y''$ ne peut recevoir de valeurs qui rendent négatif le facteur de $z$, ainsi qu'il résulte des limites fixées précédemment, il suit de là que $z$ a nécessairement le signe de R.

Tirons actuellement de l'équation $(e')$ la valeur de $y''$ en $z$; il viendra d'abord, en développant,

$$y''^2 - h''^2 + 2\frac{1-i}{i}y''e - 2\frac{1-i}{i}h''e = \Theta^2 z^2 - y''^2 z^2 + 2\frac{1-i}{i}ey''z^2 - \frac{(1-i)^2}{i^2}e^2 z^2,$$

(*) Ceux des lecteurs qui, étrangers à la théorie des fonctions elliptiques, craindraient de ne pouvoir suivre les développements dans lesquels nous allons entrer, pourront passer immédiatement aux n^os 29 et 30, où nous indiquons une solution numérique et une solution graphique fondées sur la détermination de l'intrados au moyen de son rayon de courbure.

puis, en ordonnant,

$$y''^2(1+z^2)+2\frac{1-i}{i}e(1-z^2)y''=\left[\Theta^2-\frac{(1-i)^2}{i^2}e^2\right]z^2$$
$$+2\frac{1-i}{i}h''e+h''^2.$$

Multiplions tous les termes de cette équation par $1+z^2$, et résolvons-la par rapport au produit $y''(1+z^2)$ considéré comme étant l'inconnue, il viendra

$$y''(1+z^2)=-\frac{1-i}{i}e(1-z^2)$$
$$\pm\sqrt{z^2(1+z^2)\left[\Theta^2-\frac{(1-i)^2}{i^2}e^2\right]+\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2(1-z^2)^2+\left(2\frac{1-i}{i}h''e+h''^2\right)(1+z^2)}.$$

Désignons par $Z^2$ la quantité comprise sous le radical, nous aurons, en supposant provisoirement Z susceptible de prendre le double signe,

$$y''(1+z^2)=-\frac{1-i}{i}e(1-z^2)+Z. \qquad (g')$$

Or différentions l'équation $(e')$, nous aurons

$$\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)dy''+(y''-h'')dy''=2z\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2\right]dz$$
$$-2z^2\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)dy'',$$

ou, en réunissant les termes affectés des mêmes différentielles et divisant par le facteur commun 2,

$$\left[y''+\frac{1-i}{i}e+z^2\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)\right]dy''=z\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2\right]dz;$$

mais le premier membre étant ordonné par rapport à $y''$, et le facteur de $dz$ dans le second étant remplacé par sa valeur tirée de $(f')$, cette équation devient

$$\left[y''(1+z^2)+\frac{1-i}{i}e(1-z^2)\right]dy''=\mathrm{R}dz;$$

d'un autre côté, le facteur de $dy''$ est égal à Z, d'après $(g')$ : on a donc

$$Z dy'' = R dz,$$

d'où

$$\frac{dy''}{R} = \frac{dz}{Z}. \qquad (h')$$

Nous avons établi, dans le n° 13, que le rapport $\frac{dy''}{R}$ doit rester positif; il suffira, pour faire usage de l'équation $(h')$, de donner à Z un signe tel, que le rapport $\frac{dz}{Z}$ soit également positif.

Formons actuellement la valeur de $Z^2$ : cette valeur, en ordonnant par rapport à $z$, et supprimant les termes qui se détruisent, devient

$$Z^2 = z^4 \Theta^2 + z^2 \left[\Theta^2 - 3 \frac{(1-i)^2}{i^2} e^2 + 2 \frac{1-i}{i} h'' e + h''^2\right] + \frac{(1-i)^2}{i^2} e^2 + 2 \frac{1-i}{i} h'' e + h''^2,$$

ou bien

$$Z^2 = z^4 \Theta^2 + z^2 \left[\Theta^2 + h''^2 + 2 \frac{1-i}{i} h'' e - 3 \frac{(1-i)^2}{i^2} e^2\right] + \left(h'' + \frac{1-i}{i} e\right)^2.$$

Nous avons encore besoin de décomposer la quantité $Z^2$ en ses facteurs du second degré; mais, pour cela, nous calculerons préalablement la valeur du coefficient du deuxième terme : formons donc le carré de la valeur de $\Theta$ équation $(c')$; nous aurons, en négligeant les termes du troisième ordre,

$$\Theta^2 = H^2 - 2 \frac{1+i}{i} h'' e + \frac{1}{i^2 H^2}\left[\left(1 + \frac{2}{3} i + i^2\right) 2 q^2 - \frac{4}{3} i h''^2 + (1+i)^2 h''^2\right] e^2.$$

En ayant égard à l'équation $(b')$, puis opérant les réductions, cette valeur deviendra

$$\Theta^2 = h''^2 + 2 q^2 - 2 \frac{1+i}{i} h'' e + \frac{1}{i^2}\left(1 + \frac{2}{3} i + i^2\right) e^2. \qquad (i'$$

Or les termes qui suivent $\Theta^2$, dans le coefficient du deuxième terme de la valeur de $Z^2$, sont

$$h''^2 + 2\,\frac{1-i}{i}\,h''e - 3\,\frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2:$$

en faisant la somme de ces termes et de $\Theta^2$, le facteur de $z^2$ devient

$$2\,h''^2 + 2\,q^2 - 4\,h''e + \frac{\frac{20}{3}\,i - 2\,i^2 - 2}{i^2}\,e^2,$$

et la valeur de $Z^2$ se réduit à

$$Z^2 = z^4\,\Theta^2 + 2\,z^2\left[h''^2 + q^2 - 2\,h''e + \frac{\frac{10}{3}\,i - i^2 - 1}{i^2}\,e^2\right] + \left(h'' + \frac{1-i}{i}\,e\right)^2;$$

mais au lieu de décomposer cette expression en facteurs, il sera plus simple de décomposer en facteurs le produit $Z^2\Theta^2$.

Posons, pour abréger,

$$m^2 = h''^2 + q^2 - 2\,h''e + \frac{\frac{10}{3}\,i - i^2 - 1}{i^2}\,e^2, \qquad n^2 = \left(h'' + \frac{1-i}{i}\,e\right)^2,$$

il viendra

$$Z^2\,\Theta^2 = z^4\,\Theta^4 + 2\,z^2\,\Theta^2\,m^2 + n^2\,\Theta^2:$$

il suffit d'égaler à zéro le second membre de cette équation, et d'en tirer les racines; ces racines sont

$$z^2\,\Theta^2 = -\,m^2 \pm \sqrt{m^4 - n^2\,\Theta^2}.$$

Posons encore

$$K^2 = m^4 - n^2\,\Theta^2,$$

nous aurons, pour expression du polynôme ci-dessus décomposé en ses facteurs,

$$Z^2\,\Theta^2 = (z^2\,\Theta^2 + m^2 + K)(z^2\,\Theta^2 + m^2 - K).$$

Il reste à calculer les quantités $m^2 + K$, $m^2 - K$, et par suite $m^4$, puis le produit $-n^2\,\Theta^2$. Effectuons les deux dernières de ces opérations sans réductions d'abord; nous aurons, en écrivant séparément les valeurs des trois termes dont se compose $-n^2\,\Theta^2$,

$$m^4 = +(h''^2+q^2)^2 - 4(h''^2+q^2)h''e + 2\,\frac{\frac{10}{3}i - i^2 - 1}{i^2}(h''^2+q^2)e^2 + 4h''^2e^2$$

$$-\Theta^2 h''^2 = -(h''^2+2q^2)h''^2 + 2\,\frac{1+i}{i}h''^2h''e - \frac{1+\frac{2}{3}i+i^2}{i^2}h''^2e^2$$

$$-2\,\Theta^2\,\frac{1-i}{i}h''e = -2\,\frac{1-i}{i}(h''^2+2q^2)h''e + 4\,\frac{1-i^2}{i^2}h''^2e^2$$

$$-\Theta^2\,\frac{(1-i)^2}{i^2}e^2 = -\frac{(1-i)^2}{i^2}(h''^2+2q^2)e^2.$$

Ajoutons ces équations membre à membre, il viendra, toutes réductions faites, et à cause de $K^2 = m^4 - n^2\,\Theta^2$,

$$K^2 = q^4 - \frac{4}{i}q^2h''e + \frac{4q^2e^2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i - i^2 - 1\right) + \frac{4h''^2e^2}{i^2}(2i - i^2).$$

Pour extraire la racine, nous mettrons en évidence le facteur $q^4$, ainsi qu'il suit :

$$K^2 = q^4\left\{1 - \frac{4}{i}\frac{h''e}{q^2} + \frac{4e^2}{i^2q^2}\left[\frac{8}{3}i - i^2 - 1 + \frac{h''^2}{q^2}(2i - i^2)\right]\right\}.$$

Élevant les deux membres de cette équation à la puissance $\frac{1}{2}$, nous aurons

$$K = q^2\left\{1 - \frac{2}{i}\frac{h''e}{q^2} + \frac{2e^2}{i^2q^2}\left[\frac{8}{3}i - i^2 - 1 + \frac{h''^2}{q^2}(2i - i^2 - 1)\right]\right\},$$

et enfin

$$K = q^2 - \frac{2}{i} h'' e + \frac{2e^2}{i^2}\left[\frac{8}{3} i - i^2 - 1 - (1-i)^2 \frac{h''^2}{q^2}\right]. \qquad (j')$$

Soient maintenant

$$M^2 = m^2 + K, \qquad N^2 = m^2 - K; \qquad (k')$$

nous aurons, au moyen de la valeur de $m^2$,

$$\left.\begin{aligned} M^2 &= h''^2 + 2q^2 - \frac{2(1+i)}{i} h'' e \\ &\qquad + \frac{1}{i^2}\left[\frac{26}{3} i - 3i^2 - 3 - 2(1-i)^2 \frac{h''^2}{q^2}\right] e^2, \\ N^2 &= h''^2 + \frac{2(1-i)}{i} h'' e + \frac{(1-i)^2}{i^2}\left(1 + \frac{2h''^2}{q^2}\right) e^2, \end{aligned}\right\} \quad (l')$$

et la valeur de $Z^2\,\Theta^2$ décomposée en ses facteurs pourra s'écrire

$$Z^2\,\Theta^2 = (z^2\,\Theta^2 + M^2)(z^2\,\Theta^2 + N^2),$$

ou bien encore

$$Z^2\,\Theta^2 = M^2 N^2 \left(1 + z^2 \frac{\Theta^2}{M^2}\right)\left(1 + z^2 \frac{\Theta^2}{N^2}\right),$$

d'où l'on tire

$$Z = \pm \frac{MN}{\Theta} \sqrt{\left(1 + z^2 \frac{\Theta^2}{M^2}\right)\left(1 + z^2 \frac{\Theta^2}{N^2}\right)}. \qquad (m')$$

Soit $\varphi$ un angle auxiliaire lié à $z$ par la relation

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\Theta}{N} z, \qquad (n')$$

le même angle sera donné en fonction de $y''$ par cette autre équation déduite de $(e')$,

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm \frac{\Theta}{N} \sqrt{\frac{(y''-h'')\left(y'' + h'' + 2\frac{1-i}{i} e\right)}{\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i} e\right)^2}}. \qquad (o')$$

On aura réciproquement, pour la valeur de $z$ en fonction de $\varphi$,

$$z = \frac{N}{\Theta} \operatorname{tang}\varphi; \qquad (p')$$

cette équation donne, en différentiant,

$$dz = \frac{N}{\Theta} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Substituons la valeur $(p')$ de $z$ dans l'équation $(m')$, il viendra

$$Z = \pm \frac{MN}{\Theta} \sqrt{\left(1 + \frac{N^2}{M^2} \operatorname{tang}^2\varphi\right)(1 + \operatorname{tang}^2\varphi)}.$$

Divisons membre à membre l'équation qui précède par celle-ci, nous aurons

$$\frac{dz}{Z} = \pm \frac{1}{M} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{\left(1 + \frac{N^2}{M^2} \operatorname{tang}^2\varphi\right)(1 + \operatorname{tang}^2\varphi)}},$$

ou

$$\frac{dz}{Z} = \pm \frac{1}{M} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \frac{N^2}{M^2} \sin^2\varphi}}.$$

En remplaçant ici $\cos^2\varphi$ par sa valeur $1 - \sin^2\varphi$, il vient

$$\frac{dz}{Z} = \pm \frac{1}{M} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{M^2 - N^2}{M^2} \sin^2\varphi}}.$$

Posons

$$c^2 = \frac{M^2 - N^2}{M^2}, \ (^*) \qquad (q')$$

---

(*) La valeur de $c^2$ peut être mise sous une autre forme. En effet, les équations $(k')$ donnent, par soustraction,

$$M^2 - N^2 = 2K;$$

d'où

$$M^2 = N^2 + 2K,$$

et, ensuite,

$$c^2 = \frac{2K}{N^2 + 2K}.$$

et, de plus,

$$\Delta^2 = 1 - c^2 \sin^2\varphi, \qquad (r')$$

nous aurons

$$\frac{dz}{Z} = \pm \frac{1}{M}\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

L'équation $(h')$ comparée à cette dernière donnera

$$\frac{dz}{Z} = \frac{dy''}{R} = \frac{1}{M}\frac{d\varphi}{\Delta}, \qquad (s')$$

en faisant abstraction du double signe; et, si nous voulons que cette formule soit générale, il suffira que nous disposions des valeurs de $\varphi$ et $\Delta$, de telle sorte que le rapport $\frac{d\varphi}{\Delta}$ soit toujours positif, attendu que $\frac{dy''}{R}$ doit toujours l'être, d'après ce qui a été dit au n° 13.

Voici comment on fixera les signes de ces variables : nous avons vu qu'en vertu de l'équation $(f')$, $z$ doit avoir le signe de R; il résulte de l'équation $(n')$ que tang $\varphi$ doit avoir aussi le signe du radical R. Or, d'après la variation de signe de ce radical que nous avons reconnue n° 13, il faut que tang $\varphi$ soit de même signe que le rapport $\frac{dy''}{ds''}$, le sens positif de $ds''$ étant celui que l'on obtiendrait en suivant le contour de la courbe depuis les $x$ infinis négatifs jusqu'aux $x$ infinis positifs.

Ainsi, dans la branche inférieure, on fera varier $\varphi$ de 0° à 90°, pour $y''$ compris entre $h''$ et $\Theta + \frac{1-i}{i}e$, ce qui donne tang $\varphi$ positif : en faisant décroître $y''$ depuis la limite $\Theta + \frac{1-i}{i}e$ jusqu'à la limite inférieure $h''$, $\varphi$ variera de 90° à 180°, et tang $\varphi$ sera négatif; il est clair qu'en faisant de nouveau croître et décroître $y''$, les mêmes valeurs de tang $\varphi$ se reproduiront périodiquement avec les mêmes signes, et que $\varphi$ pourra varier de 180° à 270°, puis de 270° à 360°, et ainsi de suite, à cause de tang $(180° + \varphi) =$ tang $\varphi$. On aura donc $d\varphi$ positif dans toute l'étendue de la branche inférieure, et pour que $\frac{d\varphi}{\Delta}$ soit toujours positif, il suffira que l'on prenne dans cette branche le radical $\Delta$ avec le signe $+$.

Dans la branche supérieure ou située du côté des $y$ négatifs, en faisant décroître $y''$ depuis $-\left(h''+2\frac{1-i}{i}e\right)$ jusqu'à $-\left(\Theta-\frac{1-i}{i}e\right)$, on pourra faire varier $\varphi$ de 0° à — 90°, ce qui rendra tang$\varphi$ négatif, comme cela doit être; puis, en faisant croître $y''$ depuis la limite supérieure négative $-\left(\Theta-\frac{1-i}{i}e\right)$ jusqu'à la limite inférieure négative $-\left(h''+2\frac{1-i}{i}e\right)$, on devra faire varier $\varphi$ de — 90° à — 180°, ce qui rendra tang$\varphi$ positif : en continuant ensuite à faire décroître, puis croître successivement $y''$, $\varphi$ prendra les valeurs — 270°, — 360°, etc. On aura donc $d\varphi$ négatif dans toute l'étendue de la branche supérieure, et pour que $\frac{d\varphi}{\Delta}$ reste positif, il faudra que l'on prenne $\Delta$ négatif dans toute l'étendue de cette branche.

En résumé, il faudra, pour pouvoir faire servir l'auxiliaire $\varphi$ à représenter la moitié de l'étendue indéfinie de la courbe intrados, lui attribuer des valeurs croissant indéfiniment à partir de zéro, dans la branche inférieure, en donnant à $\Delta$ le signe $+$; puis lui donner des valeurs négatives de grandeurs absolues indéfiniment croissantes, en faisant $\Delta$ négatif dans la branche supérieure. L'autre moitié résultera de la symétrie avec la première par rapport à un axe vertical passant par le point correspondant à $\varphi = 0$. On remarquera toutefois que les intégrales $\int\frac{d\varphi}{\Delta}$ et $\int\Delta d\varphi$ que fournira l'intégration conserveront les valeurs absolues qu'elles prendraient si $\Delta$ et l'amplitude $\varphi$ étaient positives, puisque les deux quantités $\Delta$ et $d\varphi$ sont toujours de même signe. Fixons encore le signe de la fonction Z que nous avons laissé arbitraire dans l'équation $(g')$; observons que, d'après l'équation $(h')$, $\frac{dz}{Z}$ doit être positif, et que la différentielle de $z$ tirée de $(p')$ donne $dz$ de même signe que $d\varphi$, c'est-à-dire positif dans la branche inférieure et négatif dans la branche supérieure : il faudra donc que l'on fasse pareillement Z positif dans la première et négatif dans la seconde; mais nous

n'aurons point à avoir égard à cette circonstance, attendu que Z n'entrera dans les équations finales que sous la forme $Z^2$ et $\frac{dz}{Z}$.

Au moyen de ces conventions, l'usage des doubles signes se trouve fixé, et il deviendra facile de procéder plus loin à la vérification susmentionnée des coefficients de l'équation de la courbe intrados.

16. L'équation $(a')$ contient, outre le facteur $\frac{dy''}{R}$, un terme en $y''^2$ qu'il s'agit également de transformer. Or on tire de l'équation $(g')$,

$$y'' = \frac{Z - \frac{1-i}{i} e (1 - z^2)}{1 + z^2},$$

et il vient, en élevant au carré,

$$y''^2 = \frac{Z^2 - 2Z\frac{1-i}{i} e (1 - z^2) + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2 (1 - z^2)^2}{(1 + z^2)^2};$$

puis, à cause de l'équation $(h')$, on en déduit

$$y''^2 \frac{dy''}{R} = \frac{Z^2}{(1+z^2)^2}\frac{dz}{Z} - 2\frac{1-i}{i} e \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} dz + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2 \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2 \frac{dz}{Z}.$$

Au moyen de la même équation $(h')$ et de cette valeur, l'équation $(a')$ devient

$$\left.\begin{aligned} dx'' = [q^2 + (h'' - e)^2]\frac{dz}{Z} - \frac{Z^2}{(1+z^2)^2}\frac{dz}{Z} + 2\frac{1-i}{i} e \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} dz \\ - \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2 \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2 \frac{dz}{Z}. \end{aligned}\right\} (t')$$

Sous cette forme, on voit qu'il n'y a point à se préoccuper du signe de Z, puisque cette quantité n'entre qu'au carré et en diviseur de $dz$, et qu'il n'en résulte que des facteurs positifs. Transformons d'abord le terme algébrique : le coefficient de $dz$, dans ce terme, ne contenant que des puissances paires de $z$, son déve-

loppement sous forme de fractions ne devra contenir également que des puissances paires de $z$; on pourra donc poser

$$\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{a}{1+z^2} + \frac{a'}{(1+z^2)^2}.$$

La réduction au même dénominateur donne

$$1 - z^2 = a(1+z^2) + a',$$

et l'on en tire, en égalant les coefficients des mêmes puissances de $z^2$,

$$1 = a + a', \quad -1 = a,$$

et, par suite, $a' = 2$ : il vient donc

$$\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}\,dz = 2\frac{dz}{(1+z^2)^2} - \frac{dz}{1+z^2};$$

or, on a, par les formules connues de réduction,

$$2\int\frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{z}{1+z^2} + \int\frac{dz}{1+z^2},$$

d'où, en différentiant,

$$2\frac{dz}{(1+z^2)^2} = d\frac{z}{1+z^2} + \frac{dz}{1+z^2};$$

ajoutant membre à membre cette équation et l'équation différentielle précédente, il vient, pour l'expression transformée,

$$\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}\,dz = d\frac{z}{1+z^2}.$$

Transformons le facteur $\frac{Z^2}{(1+z^2)^2}$ du deuxième terme du second membre de $(t')$, et pour cela reprenons la valeur primitive de $Z^2$, nous aurons

$$\frac{Z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{z^4\Theta^2 + 2z^2m^2 + n^2}{z^4 + 2z^2 + 1};$$

extrayons maintenant de la fraction qui forme le second membre de cette équation, la partie entière qu'elle contient, la division donnera

$$\frac{Z^2}{(1+z^2)^2} = \Theta^2 - 2(\Theta^2 - m^2)\frac{z^2}{(1+z^2)^2} - (\Theta^2 - n^2)\frac{1}{(1+z^2)^2}.$$

Enfin, extrayons aussi la partie entière de la fraction $\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2$ qui affecte le dernier terme de l'équation $(t')$, nous aurons

$$\frac{z^2-1}{z^2+1} = \frac{z^2+1-2}{z^2+1} = 1 - \frac{2}{z^2+1},$$

et, par suite,

$$\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2 = 1 - \frac{4}{1+z^2} + \frac{4}{(1+z^2)^2}.$$

Au moyen de ces diverses valeurs, l'équation $(t')$ deviendra

$$dx'' = [q^2 + (h''-e)^2]\frac{dz}{Z} - \left[\Theta^2 - 2(\Theta^2 - m^2)\frac{z^2}{(1+z^2)^2} - (\Theta^2 - n^2)\frac{1}{(1+z^2)^2}\right]\frac{dz}{Z}$$
$$+ 2\frac{1-i}{i}e.\,d\frac{z}{1+z^2} - \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\left[1 - \frac{4}{1+z^2} + \frac{4}{(1+z^2)^2}\right]\frac{dz}{Z};$$

ou, en réunissant les termes de même forme,

$$\left.\begin{aligned} dx'' = &-\left[\Theta^2 - q^2 - (h''-e)^2 + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]\frac{dz}{Z} + 2(\Theta^2 - m^2)\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\frac{dz}{Z} \\ &+ \left[\Theta^2 - n^2 - 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]\frac{1}{(1+z^2)^2}\frac{dz}{Z} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{Z} + 2\frac{1-i}{i}e.\,d\frac{z}{1+z^2}. \end{aligned}\right\}(u')$$

17. Exprimons maintenant les facteurs qui contiennent $z^2$ en fonctions de $\varphi$, nous aurons d'abord, en vertu de l'équation $(p')$,

$$1 + z^2 = 1 + \frac{N^2}{\Theta^2}\tang^2\varphi = \frac{\Theta^2\cos^2\varphi + N^2\sin^2\varphi}{\Theta^2\cos^2\varphi},$$

ou

$$1 + z^2 = \frac{\Theta^2 - (\Theta^2 - N^2)\sin^2\varphi}{\Theta^2\cos^2\varphi};$$

on en déduit

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{\cos^2\varphi}{1 - \frac{\Theta^2 - N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi}.$$

Posons

$$\frac{\Theta^2 - N^2}{\Theta^2} = c^2 + c_1^2, \qquad (v')$$

il viendra

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{\cos^2\varphi}{1 - (c^2 + c_1^2)\sin^2\varphi}.$$

Nous allons faire voir que $c_1^2$ est une quantité du deuxième ordre de petitesse. En effet, la relation précédente donne, en mettant pour $c^2$ sa valeur $(q')$,

$$1 - \frac{N^2}{\Theta^2} = 1 - \frac{N^2}{M^2} + c_1^2,$$

et il en résulte

$$c_1^2 = \frac{N^2}{M^2} - \frac{N^2}{\Theta^2} = \frac{N^2}{M^2\Theta^2}(\Theta^2 - M^2):$$

les valeurs $(i')$ de $\Theta^2$, et $(l')$ de $M^2$, ne diffèrent que dans les termes du deuxième ordre, et la différence de ces termes se réduit à

$$2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(2 + \frac{h''^2}{q^2}\right)e^2;$$

si l'on a égard à la relation $(b')$, on en déduit

$$\Theta^2 - M^2 = 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{H^2}{q^2}e^2.$$

Or pour former la valeur de $c_1^2$, en négligeant les termes du troisième ordre, on doit négliger, dans les facteurs $M^2$, $N^2$ et $\Theta^2$, les termes du premier et du deuxième ordre, puisque le facteur que nous venons de calculer est du second; ces facteurs se réduisent dès lors à $H^2$, $h''^2$ et $H^2$, et il vient simplement

$$c_1^2 = 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{h''^2}{H^2}\frac{e^2}{q^2}. \qquad (w')$$

La valeur de $c_1^2$ est donc effectivement du deuxième ordre, ainsi que nous venons de l'annoncer. Nous profiterons de cette circonstance pour éviter les fonctions elliptiques de troisième espèce.

Considérons, en effet, la fonction

$$\frac{1}{1-(c^2+c_1^2)\sin^2\varphi};$$

nous aurons, en développant cette fonction suivant les puissances de $c_1^2$, au moyen du théorème de Taylor, et nous bornant au terme en $c_1^2$,

$$\frac{1}{1-(c^2+c_1^2)\sin^2\varphi}=\frac{1}{1-c^2\sin^2\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^2}c_1^2,$$

et la valeur ci-dessus de $\frac{1}{1+z^2}$, en faisant usage de la formule $(r')$, pourra s'écrire

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}+\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}c_1^2;$$

on tire de là

$$\frac{1}{(1+z^2)^2}=\frac{\cos^4\varphi}{\Delta^4}+2\frac{\sin^2\varphi\cos^4\varphi}{\Delta^6}c_1^2,$$

puis, au moyen de l'équation $(p')$,

$$\frac{z}{1+z^2}=\frac{N}{\Theta}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}+\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{\Delta^4}\frac{k''}{H}c_1^2$$

(on remplace ici, dans le terme du deuxième ordre, le rapport $\frac{N}{\Theta}$ par $\frac{k''}{H}$ qui n'en diffère que de quantités du premier ordre, et ne donne lieu, par suite, qu'à des erreurs du troisième).

En élevant au carré les deux membres de cette équation, il vient

$$\frac{z^2}{(1+z^2)^2}=\frac{N^2}{\Theta^2}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}+2\frac{\sin^4\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^6}\frac{k''^2}{H^2}c_1^2,$$

équation dans laquelle $\frac{h''}{H}$ tient la place de $\frac{N}{\Theta}$ au dernier terme, par les mêmes raisons que tout à l'heure.

Substituons maintenant les diverses valeurs que nous venons d'exprimer en fonctions de $\varphi$, dans l'équation $(u')$ dont nous multiplierons préalablement tous les termes par M, puis à la place de $M\frac{dz}{Z}$, sa valeur $\frac{d\varphi}{\Delta}$ tirée de $(s')$, et enfin à la place de $c_1^2$, sa valeur $(w')$; il viendra, en négligeant des termes d'ordres supérieurs au second,

$$\begin{aligned}
M\,dx'' = &-\left[\Theta^2 - q^2 - (h''-e)^2 + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\
&+ 2(\Theta^2 - m^2)\left[\frac{N^2}{\Theta^2}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^4}{H^4}\frac{e^2}{q^2}\frac{\sin^4\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\
&+ \left[\Theta^2 - n^2 - 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]\left[\frac{\cos^4\varphi}{\Delta^4} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^2}\frac{e^2}{q^2}\frac{\sin^2\varphi\cos^4\varphi}{\Delta^4}\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\
&+ 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\frac{d\varphi}{\Delta} + 2\frac{1-i}{i}e\frac{MN}{\Theta}.d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}.
\end{aligned}$$

Il devient indispensable de présenter ici le développement de chacun des coefficients, que l'on effectuera sans peine au moyen des valeurs de $\Theta^2$, $m^2$ et $n^2$:

$$1^{er}\text{ coefficient} = -\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{1}{i^2}\left(2 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right],$$

$$2^{e}\text{ coefficient} = +2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{2}{i^2}\left(1 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right],$$

$$3^{e}\text{ coefficient} = +2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i - i^2 - 1\right)e^2\right].$$

Le quatrième coefficient n'a point de changement à subir. Quant au dernier, observons qu'il suffit d'avoir égard au terme du premier ordre, dans la valeur du produit $\frac{MN}{\Theta}$, puisque ce dernier coefficient est lui-même du premier ordre. Or nous pouvons tirer

la valeur du rapport $\frac{M}{\Theta}$, de l'expression obtenue ci-dessus de la différence $\Theta^2 - M^2$; elle donne, en effet,

$$\frac{M^2}{\Theta^2} = 1 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{e^2}{q^2},$$

en substituant l'unité au rapport $\frac{H^2}{\Theta^2}$ dans le terme du deuxième ordre; on en déduit

$$\frac{M}{\Theta} = 1 - \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{e^2}{q^2}.$$

Cette quantité ne différant de l'unité que par un terme du deuxième ordre doit être réduite à l'unité dans l'expression du produit $\frac{MN}{\Theta}$, ce qui réduit ce produit à la valeur de N développée jusqu'aux termes du premier ordre inclusivement; or, la valeur ($l'$) de $N^2$ peut s'écrire

$$N^2 = \left(h'' + \frac{1-i}{i} e\right)^2 + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{h''^2}{q^2} e^2,$$

et lors même que $h''$, qui est toujours $> e$, serait très-petit, on aurait encore, aux termes près du deuxième ordre,

$$N = h'' + \frac{1-i}{i} e.$$

Le dernier coefficient a donc pour expression

$$2\frac{1-i}{i} h''e + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2.$$

Au moyen de ces valeurs des divers coefficients, l'équation différentielle ci-dessus devient

$$\begin{aligned}
M\,dx'' = &-\left[q^2 - 2\frac{h''e}{i} + \frac{1}{i^2}\left(2 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\
&+ 2\left[q^2 - 2\frac{h''e}{i} + \frac{2}{i^2}\left(1 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right]\left[\frac{N^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{\Theta^2 \Delta^4} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{h''^4}{H^4} \frac{e^2}{q^2} \frac{\sin^4\varphi \cos^2\varphi}{\Delta^6}\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\
&+ 2\left[q^2 - 2\frac{h''e}{i} + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i - i^2 - 1\right)e^2\right]\left[\frac{\cos^4\varphi}{\Delta^4} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{h''^2}{H^2} \frac{e^2}{q^2} \frac{\sin^2\varphi \cos^4\varphi}{\Delta^6}\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\
&+ 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2 \frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2} \frac{d\varphi}{\Delta} + 2\left[\frac{1-i}{i} h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right] d\,\frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\Delta^2}.
\end{aligned}$$

Développons les produits indiqués dans le second membre, et négligeons les termes d'ordres supérieurs au deuxième, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
M\,dx'' = &-\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{1}{i^2}\left(2 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\
&+ 2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{2}{i^2}\left(1 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right]\frac{N^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Theta^2}\frac{d\varphi}{\Delta^2} \\
&+ 2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i - i^2 - 1\right)e^2\right]\frac{\cos^4\varphi}{\Delta^2}d\varphi \\
&+ 8\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^4}{H^4}e^2\frac{\sin^4\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^7}d\varphi \\
&+ 8\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^2}e^2\frac{\sin^2\varphi\cos^4\varphi}{\Delta^7}d\varphi \\
&+ 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}d\varphi \\
&+ 2\left[\frac{1-i}{i}h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}.
\end{aligned}\right\}\ (x')$$

18. Commençons par effectuer la réduction des termes du deuxième ordre qui ont $\Delta^7$ en dénominateur. Ces termes peuvent s'écrire

$$8\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^2}e^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^7}\left(\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi,$$

et la dernière parenthèse de cette expression donne

$$\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 - \left(1 - \frac{h''^2}{H^2}\right)\sin^2\varphi :$$

or on peut substituer dans cette valeur, à la place de $\frac{h''^2}{H^2}$, le rapport $\frac{N^2}{M^2}$ qui n'en diffère que de quantités du premier ordre, et, par suite, ne peut produire que des erreurs du troisième; il

en résulte que le facteur $1 - \frac{k''^2}{H^2}$ pourra être remplacé par $c^2$ d'après $(q')$, et que l'on aura, en ayant égard à la relation $(r')$,

$$\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \Delta^2, \qquad (y')$$

valeur exacte aux quantités près du premier ordre.

La somme des termes du deuxième ordre qui ont $\Delta^7$ en dénominateur se réduit ainsi à

$$8\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{k''^2}{H^2} e^2 \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^8} d\varphi. \qquad (z')$$

Les termes qui ont $\Delta^5$ en dénominateur dans la valeur de $M dx''$ peuvent se grouper ainsi qu'il suit :

$$2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e\right]\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^5}\left(\frac{N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi$$
$$+ \frac{4}{i^2}(1+i^2)e^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^5}\left(\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right)d\varphi$$
$$+ \frac{16}{3i}e^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^5}\left(2\cos^2\varphi - \frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi\right)d\varphi.$$

(Dans les deux derniers termes, qui sont du deuxième ordre, on a remplacé le rapport $\frac{N^2}{\Theta^2}$ par $\frac{k''^2}{H^2}$ qui n'en diffère que de quantités du premier ordre.) Le premier de ces termes va se réduire aisément : en effet, on a, en ayant égard aux relations $(v')$, $(r')$ et $(w')$,

$$\frac{N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 - \frac{\Theta^2 - N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi = 1 - (c^2 + c_1^2)\sin^2\varphi,$$
$$\frac{N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \Delta^2 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{k''^2}{H^2}\frac{e^2}{q^2}\sin^2\varphi;$$

en substituant cette valeur, le premier terme donne

$$2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e\right]\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^6}d\varphi - 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{k''^2}{H^2}e^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^8}d\varphi. \qquad (a'')$$

Pour transformer le deuxième terme, écrivons la parenthèse sous la forme

$$\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi - \cos^2\varphi = -\left(\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) + 2\,\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi;$$

puisqu'il s'agit ici de termes du second ordre, on aura d'après $(y')$,

$$\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi - \cos^2\varphi = -\Delta^2 + 2\,\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi,$$

et le deuxième terme donnera

$$-\frac{4}{i^2}(1+i^2)\,e^2\,\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi + \frac{8}{i^2}(1+i^2)\,\frac{k''^2}{H^2}e^2\,\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi. \quad (b'')$$

Enfin écrivons la parenthèse du troisième terme sous la forme

$$2\cos^2\varphi - \frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi = 2\left(\cos^2\varphi + \frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi\right) - 3\,\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi,$$

on aura, de la même manière,

$$2\cos^2\varphi - \frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi = 2\,\Delta^2 - 3\,\frac{k''^2}{H^2}\sin^2\varphi,$$

et le troisième terme deviendra

$$\frac{32}{3i}\,e^2\,\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi - \frac{16}{i}\,\frac{k''^2}{H^2}\,e^2\,\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi. \quad (c'')$$

Le seul terme qui contienne $\Delta^2$ en dénominateur dans l'équation $(x')$ est

$$4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\,\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi. \quad (d'')$$

Observons que l'ensemble des termes $(z')$, $(a'')$, $(b'')$, $(c'')$ et $(d'')$ est l'équivalent de la somme des cinq termes compris entre le premier et le dernier du second membre de $(x')$; il ne reste, pour former l'expression transformée de la valeur de $M\,dx''$, qu'à réunir

ces termes aux termes extrêmes du second membre de $(x')$. Effectuant cette réunion, et ordonnant en même temps, il vient

$$\left.\begin{aligned} M\,dx'' = &- \left[q^2 - \frac{2}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2}\left(2 - \frac{4}{3}\,i + i^2\right)e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\ &+ 2\left[q^2 - \frac{2}{i}\,h''e + \frac{4}{3}\,\frac{e^2}{i}\right]\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^4}\,d\varphi \\ &+ 12\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^2}\,e^2\,\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5}\,d\varphi \\ &+ 2\left[\frac{1-i}{i}\,h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}. \end{aligned}\right\}(e'')$$

18 *bis.* Nous allons nous trouver obligé de donner des formules de réduction applicables à l'équation qui précède. Proposons-nous d'abord de réduire l'exposant élevé qui entre au dénominateur du troisième terme de son second membre.

On arrivera par la différentiation, et en opérant convenablement les réductions, à la formule suivante :

$$d\,\frac{\sin^m\varphi\cos^n\varphi}{\Delta^{2k-1}} = \left(m - \frac{m+n}{c^2}\right)\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi}{\Delta^{2k-1}}\,d\varphi + \frac{m+n}{c^2}\,\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi}{\Delta^{2k-3}}\,d\varphi$$
$$+ (2k-1)\,c^2\,\frac{\sin^{m+1}\varphi\cos^{n+1}\varphi}{\Delta^{2k+1}}\,d\varphi,$$

d'où l'on tire inversement

$$\frac{\sin^{m+1}\varphi\cos^{n+1}\varphi}{\Delta^{2k+1}}\,d\varphi = \frac{1}{(2k-1)\,c^2}\left\{\begin{aligned} &d\,\frac{\sin^m\varphi\cos^n\varphi}{\Delta^{2k-1}} + \left(\frac{m+n}{c^2} - m\right)\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi}{\Delta^{2k-1}}\,d\varphi \\ &- \frac{m+n}{c^2}\,\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi}{\Delta^{2k-3}}\,d\varphi \end{aligned}\right\}.\quad(f'')$$

En faisant dans cette formule $m = 1$, $n = 1$ et $k = 2$, il viendra

$$\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5}\,d\varphi = \frac{1}{3c^2}\left\{d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3} + \left(\frac{2}{c^2} - 1\right)\frac{d\varphi}{\Delta^3} - \frac{2}{c^2}\,\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}.$$

D'un autre côté, si l'on différentie l'expression $\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}$ et que l'on opère les réductions, on arrivera à la relation

$$d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \frac{1}{c^2}\left[\Delta\,d\varphi - (1 - c^2)\,\frac{d\varphi}{\Delta^3}\right],$$

d'où l'on déduit inversement

$$\frac{d\varphi}{\Delta^2} = \frac{1}{1-c^2}\left\{\Delta\, d\varphi - c^2\, d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right\}. \qquad (g'')$$

Substituant cette valeur de $\frac{d\varphi}{\Delta^2}$ dans l'expression différentielle ci-dessus, on aura

$$\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}\,d\varphi = \frac{1}{3c^2}\left\{d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2} - \frac{2-c^2}{1-c^2}\,d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} + \frac{1}{c^2}\,\frac{2-c^2}{1-c^2}\,\Delta\, d\varphi - \frac{2}{c^2}\,\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}.$$

Or cette expression différentielle affectant dans l'équation $(e'')$ un terme du deuxième ordre, on peut y substituer à la place de $c^2$ sa valeur obtenue en négligeant ceux du premier et du deuxième, laquelle est, d'après les équations $(q')$ et $(l')$,

$$c^2 = \frac{2q^2}{k''^2+2q^2} + \ldots = 2\,\frac{q^2}{H^2} + \ldots :$$

on en tire

$$\frac{1}{c^2} = \frac{H^2}{2q^2}, \quad 1 - c^2 = \frac{k''^2}{H^2}, \qquad 2 - c^2 = 1 + \frac{k''^2}{H^2} = 2\,\frac{k''^2+q^2}{H^2},$$

et, par suite,

$$\frac{2-c^2}{1-c^2} = 2\left(1 + \frac{q^2}{k''^2}\right), \qquad \frac{1}{c^2}\,\frac{2-c^2}{1-c^2} = \frac{H^2}{q^2} + \frac{H^2}{k''^2}.$$

Au moyen de ces diverses valeurs, le terme qui contient $\Delta^5$ dans l'équation $(e'')$ se transformera en

$$2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{k''^2}{q^2}e^2\left\{d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2} - 2\left(1+\frac{q^2}{k''^2}\right)d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} + H^2\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{k''^2}\right)\Delta\, d\varphi - \frac{H^2}{q^2}\,\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}. \qquad (h'')$$

Occupons-nous maintenant du facteur $\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^4}\,d\varphi$; nous aurons

$$\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^4}\,d\varphi = \frac{1-\sin^2\varphi}{\Delta^4}\,d\varphi = \frac{d\varphi}{\Delta^2} - \frac{\sin^2\varphi}{\Delta^4}\,d\varphi :$$

on peut écrire

$$-\frac{\sin^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi = \frac{1}{c^2}\,\frac{1-c^2\sin^2\varphi-1}{\Delta^2}\,d\varphi = \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{d\varphi}{\Delta^2}\right);$$

on en déduit

$$\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi = \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{\Delta}-(1-c^2)\,\frac{d\varphi}{\Delta^2}\right),$$

puis, en ayant égard à l'équation $(g'')$,

$$\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\,d\varphi = \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{\Delta}-\Delta\,d\varphi+c^2\,d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right),$$

et le deuxième terme du second membre de $(e'')$ devient

$$2\left[q^2-\frac{2}{i}\,h''e+\frac{4}{3}\,\frac{e^2}{i}\right]\left[\frac{1}{c^2}\,\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{1}{c^2}\,\Delta\,d\varphi+d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right]. \qquad (i'')$$

Réunissons les expressions $(h'')$ et $(i'')$ aux deux termes extrêmes du second membre de l'équation $(e'')$, puis ordonnons; il viendra

$$\left.\begin{aligned}
M\,dx'' = &\left\{\frac{2}{c^2}\left[q^2-\frac{2}{i}\,h''e+\frac{4}{3}\,\frac{e^2}{i}\right]-\left[q^2-\frac{2}{i}\,h''e+\frac{1}{i^2}\left(2-\frac{4}{3}\,i+i^2\right)e^2\right]\right.\\
&\qquad\left.-2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{H^2h''^2}{q^4}\,e^2\right\}\frac{d\varphi}{\Delta}\\
&-\left\{\frac{2}{c^2}\left[q^2-\frac{2}{i}\,h''e+\frac{4}{3}\,\frac{e^2}{i}\right]-2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(1+\frac{h''^2}{q^2}\right)\frac{H^2}{q^2}\,e^2\right\}\Delta\,d\varphi\\
&+2\left\{q^2-\frac{2}{i}\,h''e+\frac{4}{3}\,\frac{e^2}{i}-2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(1+\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right\}d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\\
&+2\left\{\frac{1-i}{i}\,h''e+\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2\right\}d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}\\
&+2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{q^2}\,e^2\,d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3}.
\end{aligned}\right\}(j'')$$

Avant d'écrire l'intégrale de cette expression, nous réduirons les coefficients de ses différents termes. Et d'abord considérons la quantité

$$\frac{2}{c^2}\left[q^2-\frac{2}{i}\,h''e+\frac{4}{3}\,\frac{e^2}{i}\right]$$

qui fait partie des deux premiers coefficients : substituons à $c^2$ sa valeur

$$c^2 = \frac{2K}{M^2}$$

qu'on obtient en vertu de $M^2 - N^2 = 2K$, la quantité ci-dessus deviendra

$$M^2 \frac{q^2 - \frac{2}{i} h'' e + \frac{4}{3}\frac{e^2}{i}}{K}.$$

Soit, pour abréger,

$$K_1 = q^2 - \frac{2}{i} h'' e + \frac{4}{3}\frac{e^2}{i};$$

la valeur $(j')$ de K pourra se mettre sous la forme

$$K = K_1 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h''^2}{q^2}\right) e^2,$$

et la même quantité deviendra

$$M^2 \frac{K_1}{K_1 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h''^2}{q^2}\right) e^2} = \frac{1}{1 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h''^2}{q^2}\right) \frac{e^2}{q^2}} M^2,$$

en divisant haut et bas par $K_1$, et substituant ensuite $q^2$ à la place de $K_1$, dans le terme du deuxième ordre; mais si nous réduisons en série le facteur de $M^2$, la quantité dont il s'agit aura pour expression

$$\left[1 + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h''^2}{q^2}\right) \frac{e^2}{q^2}\right] M^2;$$

effectuant le produit indiqué ici au moyen de la valeur $(l')$ de $M^2$, cette quantité deviendra

$$h''^2 + 2q^2 - 2\left(\frac{1+i}{i}\right) h'' e + \frac{1}{i^2}\left(\frac{26}{3} i - 3i^2 - 3 - 2(1-i)^2 \frac{h''^2}{q^2}\right) e^2$$
$$+ 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h''^2}{q^2}\right)\left(2 + \frac{h''^2}{q^2}\right) e^2.$$

Réduisons les termes du deuxième ordre, ces termes deviendront successivement

$$\frac{1}{i^2}\left\{\frac{26}{3}i - 3i^2 - 3 + 2(1-i)^2\left(2 + 2\frac{h''^2}{q^2} + \frac{h''^4}{q^4}\right)\right\}e^2$$

$$= \frac{1}{i^2}\left\{\frac{26}{3}i - 3i^2 - 3 + 4 - 8i + 4i^2 + 2(1-i)^2\left(2 + \frac{h''^2}{q^2}\right)\frac{h''^2}{q^2}\right\}e^2$$

$$= \frac{1}{i^2}\left\{1 + \frac{2}{3}i + i^2 + 2(1-i)^2\frac{H^2 h''^2}{q^4}\right\}e^2,$$

et l'on aura finalement

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{c^2}\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{4}{3}\frac{e^2}{i}\right] &= h''^2 + 2q^2 - 2\frac{1+i}{i}h''e \\ &\quad + \frac{1}{i^2}\left[1 + \frac{2}{3}i + i^2 + 2(1-i)^2\frac{H^2 h'^2}{q^4}\right]e^2.\end{aligned}\right\}\ (k'')$$

Cette valeur va nous servir à opérer la réduction des coefficients de $\frac{d\varphi}{\Delta}$ et $\Delta d\varphi$ dans l'équation $(j'')$; en effet, pour former le premier, nous devons ajouter au second membre de $(k'')$ les termes

$$-q^2 + \frac{2}{i}h''e - \frac{1}{i^2}\left[2 - \frac{4}{3}i + i^2 + 2(1-i)^2\frac{H^2 h''^2}{q^4}\right]e^2.$$

En ajoutant et réduisant, il vient

$$\text{coeff. de } \frac{d\varphi}{\Delta} = h''^2 + q^2 - 2h''e + \frac{2i-1}{i^2}e^2.$$

Pour former le coefficient suivant, il faut ajouter au même membre les termes

$$-2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{H^2}{q^2}e^2 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{H^2 h''^2}{q^4}e^2,$$

et changer ensuite le signe du résultat : effectuant ces opérations, on a

$$\text{coeff. de } \Delta\, d\varphi = -\left[h''^2 + 2q^2 - 2\,\frac{1+i}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2}\left(1 + \frac{2}{3}\,i + i^2 - 2\,(1-i)^2\,\frac{H^2}{q^2}\right)e^2\right].$$

On peut donner au coefficient de $e^2$ une autre forme en remplaçant $H^2$ par sa valeur $h''^2 + 2\,q^2$, d'où résulte $\frac{H^2}{q^2} = 2 + \frac{h''^2}{q^2}$; on trouve, en faisant cette substitution,

$$\text{coeff. de } \Delta d\varphi = -\left[h''^2 + 2q^2 - 2\,\frac{1+i}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2}\left(\frac{26}{3}\,i - 3\,i^2 - 3 - 2\,(1-i)^2\,\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right].$$

En réunissant les termes en $e^2$ du coefficient du terme suivant, on aura

$$\text{coeff. de } d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = 2\left[q^2 - \frac{2}{i}\,h''e + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}\,i - i^2 - 1 - (1-i)^2\,\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right].$$

Au moyen de ces valeurs réduites des coefficients, l'équation $(j'')$ devient finalement

$$\left.\begin{aligned}
M\,dx'' = &+\left[h''^2 + q^2 - 2\,h''e + \frac{2i-1}{i^2}\,e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta}\\
&-\left[h''^2 + 2q^2 - 2\,\frac{1+i}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2}\left(\frac{26}{3}\,i - 3\,i^2 - 3 - 2\,(1-i)^2\,\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right]\Delta\, d\varphi\\
&+2\left[q^2 - \frac{2}{i}\,h''e + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}\,i - i^2 - 1 - (1-i)^2\,\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right]d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\\
&+2\left[\frac{1-i}{i}\,h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}\\
&+2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{q^2}\,e^2\,d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}.
\end{aligned}\right\}\quad (l'')$$

19. Maintenant l'intégration de l'équation différentielle de l'intrados se trouve dépendre des fonctions elliptiques. En effet, posons, comme le fait Legendre,

$$F(c,\varphi)=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta}, \qquad E(c,\varphi)=\int_0^\varphi \Delta\, d\varphi; \qquad (m'')$$

posons en même temps

$$\left.\begin{aligned}
A&=h''^2+q^2-2h''e+\frac{2i-1}{i^2}e^2,\\
B&=h''^2+2q^2-2\frac{1+i}{i}h''e+\frac{1}{i^2}\left(\frac{26}{3}i-3i^2-3-2(1-i)^2\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2,\\
C&=2\left[q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i-i^2-1-(1-i)^2\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right], \qquad (^*)\\
D&=2\left[\frac{1-i}{i}h''e+\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2\right],\\
G&=2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{q^2}e^2;
\end{aligned}\right\}(n'')$$

nous aurons, en intégrant l'équation $(l'')$, et supposant $x''$ nul en même temps que $\varphi$,

$$Mx''=A.F(c,\varphi)-B.E(c,\varphi)+C\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}+D\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}+G\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3}. \quad (o'')$$

---

(*) Nous ferons remarquer que les coefficients B et C, comparés aux expressions $(l')$ et $(j')$, donnent

$$B=M^2, \quad C=2K.$$

Il est probable qu'en suivant dans l'intégration une marche plus directe, on aurait obtenu ces relations *a priori*. Cela eût été d'autant plus intéressant que nous ne pouvons affirmer leur exactitude que jusque dans les termes du deuxième ordre inclusivement. (Au lieu de rechercher les moyens de réduire les développements analytiques dans cette partie du Mémoire, nous avons préféré consacrer le temps dont nous pouvions disposer, au calcul des Tables que l'on trouvera à la fin de la deuxième partie.)

Les équations précédentes simplifient la valeur de $c^2$ qui devient

$$c^2=\frac{C}{B};$$

et l'on peut écrire $\sqrt{B}$ à la place de M, dans l'équation $(o'')$.

Telle est l'équation de l'intrados qu'il s'agissait d'obtenir, et dans laquelle $x''$ se trouve implicitement affecté du double signe, en vertu de la relation $(o')$. Nous n'avons tenu compte que de l'un des deux signes en discutant les parties des deux branches de la courbe qui s'étendent vers les $x$ positifs; la symétrie autour d'un axe qui se confond actuellement avec l'axe des $y$ en vertu de la valeur nulle de la constante de l'intégration, nous a dispensé de nous occuper des deux signes à la fois. On voit maintenant qu'en ayant égard au double signe de $\tang\varphi$, l'équation $(o'')$ représente la courbe dans toute son étendue.

On remarquera, ainsi que nous l'avons annoncé plus haut, que l'expression de $x''$ perd deux termes lorsqu'on suppose $i = 1$; en effet, cette hypothèse rend nuls les coefficients D et G, en même temps qu'elle simplifie les valeurs des trois premiers.

Avant de faire usage de l'équation $(o'')$ en l'appliquant à la question des arches de pont, il convient d'indiquer un procédé rapide pour le calcul des fonctions $F$ et $E$, et de vérifier l'exactitude des coefficients $(n'')$.

### CALCUL DES FONCTIONS $F$ ET $E$.

20. On emploie deux procédés différents pour le calcul de ces fonctions, suivant que le module $c$ est voisin de l'unité ou de zéro. Il est facile de voir que, dans la question des arches de pont, ce module diffère peu de l'unité : en effet, $c^2$ ne diffère de 1, en vertu de l'équation $(q')$, que de la quantité $\frac{N^2}{M^2}$; or le carré $h''^2$ de l'ordonnée du sommet de l'intrados est en général assez petit par rapport à $2q^2$, à cause de la grandeur du produit $e\mu_0$, équation $(s)$; $c^2$ diffère donc peu de l'unité.

Dans cette hypothèse, on calcule une échelle de modules $c_1$, $c_2$, $c_3$, ..., $c_n$ par les formules suivantes:

$$c_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c},\quad c_2 = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1},\quad c_3 = \frac{2\sqrt{c_2}}{1+c_2},\ \ldots,\ c_n = \frac{2\sqrt{c_{n-1}}}{1+c_{n-1}};$$

on calcule pareillement une série d'amplitudes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, par les équations

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = c \sin\varphi,$$
$$\sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = c_1 \sin\varphi_1,$$
$$\sin(2\varphi_3 - \varphi_2) = c_2 \sin\varphi_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin(2\varphi_n - \varphi_{n-1}) = c_{n-1} \sin\varphi_{n-1},$$

et l'on s'arrête, dans le calcul des modules, au module $c_n$ qui devient égal à l'unité, du moins, au degré d'approximation que l'on veut obtenir; on poursuit le calcul des amplitudes jusqu'à celle $\varphi_n$ qui correspond à $c_n = 1$, d'où résulte l'égalité de toutes les amplitudes suivantes. On a ensuite, entre les fonctions $F$ des modules et amplitudes de mêmes indices, les relations

$$F(c_n, \varphi_n) = \log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi_n\right), \qquad (*)$$
$$F(c_{n-1}, \varphi_{n-1}) = \frac{2}{1 + c_{n-1}} F(c_n, \varphi_n),$$
$$F(c_{n-2}, \varphi_{n-2}) = \frac{2}{1 + c_{n-2}} F(c_{n-1}, \varphi_{n-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(c_2, \varphi_2) = \frac{2}{1 + c_2} F(c_3, \varphi_3),$$
$$F(c_1, \varphi_1) = \frac{2}{1 + c_1} F(c_2, \varphi_2),$$
$$F(c, \varphi) = \frac{2}{1 + c} F(c_1, \varphi_1).$$

---

(*) Le logarithme qui figure ici est un logarithme népérien ou hyperbolique.

On en déduirait, en multipliant ces équations membre à membre,

$$F(c,\varphi)=\frac{2}{1+c}\cdot\frac{2}{1+c_1}\cdot\frac{2}{1+c_2}\cdots\cdots\frac{2}{1+c_{n-2}}\cdot\frac{2}{1+c_{n-1}}\log\operatorname{tang}\left(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi_n\right);$$

mais le calcul de la fonction $E$ exige, lorsque $c$ diffère peu de l'unité, que l'on fasse usage des fonctions $F$ intermédiaires.

Au moyen des modules, amplitudes et fonctions $F$ précédemment calculées, les formules suivantes serviront au calcul de la fonction $E$:

$$E(c_n,\varphi_n)=\sin\varphi_n,$$

$$E(c_{n-1},\varphi_{n-1})=(1+c_{n-1})E(c_n,\varphi_n)+(1-c_{n-1})F(c_n,\varphi_n)-c_{n-1}\sin\varphi_{n-1},$$

$$E(c_{n-2},\varphi_{n-2})=(1+c_{n-2})E(c_{n-1},\varphi_{n-1})+(1-c_{n-2})F(c_{n-1},\varphi_{n-1})-c_{n-2}\sin\varphi_{n-2},$$

. . . . . .

$$E(c_2,\varphi_2)=(1+c_2)E(c_3,\varphi_3)+(1-c_2)F(c_3,\varphi_3)-c_2\sin\varphi_2,$$

$$E(c_1,\varphi_1)=(1+c_1)E(c_2,\varphi_2)+(1-c_1)F(c_2,\varphi_2)-c_1\sin\varphi_1,$$

$$E(c,\varphi)=(1+c)E(c_1,\varphi_1)+(1-c)F(c_1,\varphi_1)-c\sin\varphi.$$

Les formules qui précèdent peuvent paraître longues à calculer; pourtant il n'en est rien, dans le cas qui nous occupe : en général, il suffira de calculer un seul module et une seule amplitude, ce qui réduira le calcul de $F$ et de $E$ à l'emploi de la première et de la dernière formule de chaque série.

On pourrait profiter de la petite différence que nous admettons entre $c$ et l'unité pour réduire les intégrales ($m''$) en séries ordonnées suivant les puissances de $(1-c^2)$; nous préférons nous en tenir aux formules que nous venons de reproduire, attendu qu'elles sont encore facilement applicables au calcul des fonctions $F$ et $E$ lorsque $c$ diffère beaucoup plus de l'unité que nous ne l'avons supposé.

VÉRIFICATION DE L'EXACTITUDE DES COEFFICIENTS ($n''$).

21. Nous ne prétendons pas donner ici la vérification générale de ces coefficients, ce qui conduirait à des calculs fort pénibles; mais seulement les vérifier dans quelques cas particuliers. Nous allons différentier l'équation ($o''$), et pour cela, considérons la fonction

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^k};$$

nous aurons, en différentiant,

$$d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^k} = \frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta^k}d\varphi + k\frac{c^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^{k+2}}d\varphi,$$

et, en faisant successivement dans cette formule $k=1$, $k=2$ et $k=3$, nous obtiendrons les différentielles des parties variables des derniers termes du second membre de ($o''$). Quant à celles des premiers termes, elles résulteront de la suppression du signe $\int$ dans les équations ($m''$). Nous aurons ainsi

$$\mathrm{M}\,dx'' = \mathrm{A}\frac{d\varphi}{\Delta} - \mathrm{B}\Delta\,d\varphi + \mathrm{C}\left(\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta} + c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^3}\right)d\varphi$$
$$+\mathrm{D}\left(\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta^2}+2c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}\right)d\varphi+\mathrm{G}\left(\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta^3}+3c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5}\right)d\varphi.$$

Or nous avons, équation ($s'$),

$$\frac{1}{\mathrm{M}}\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{dy''}{\mathrm{R}},$$

et, d'après l'équation ($a'$),

$$\frac{1}{\mathrm{M}}\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{dx''}{q^2+(h''-e)^2-y''^2},$$

en faisant abstraction du double signe; on en tire

$$\mathrm{M}\Delta\frac{dx''}{d\varphi} = q^2+(h''-e)^2-y''^2:$$

égalant le second membre de cette équation à la valeur de $M\Delta\frac{dx''}{d\varphi}$ tirée de l'expression de $Mdx''$, il vient

$$\left.\begin{aligned} q^2+(h''-e)^2-y''^2 &= A-B\Delta^2+C\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^2}\right) \\ &+D\left(\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta}+2c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^2}\right)+G\left(\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta^2}+3c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}\right). \end{aligned}\right\}(p'')$$

Cette relation entre $y''$ et $\varphi$ étant générale, doit pouvoir être aisément vérifiée dans certains cas particuliers.

Soit, en premier lieu, $y''=h''$ ordonnée du sommet de l'intrados, l'équation $(o')$ donne $\tang\varphi=0$, d'où $\sin^2\varphi=0$, $\cos^2\varphi=1$, et $\Delta=1$. Ces valeurs étant substituées dans l'équation $(p'')$, il en résulte la relation suivante entre les coefficients,

$$q^2-2h''e+e^2=A-B+C+D+G. \qquad (q'')$$

Soit, en second lieu, $y''=-\left(h''+2\frac{1-i}{i}e\right)$ ordonnée du point de la branche supérieure le plus voisin de l'axe des $x$, l'équation $(o')$ donnera pareillement $\tang\varphi=0$, et l'on aura comme tout à l'heure $\sin^2\varphi=0$, $\cos^2\varphi=1$; mais le point dont il s'agit appartenant à la branche supérieure, nous devrons, d'après ce qui a été dit au n° 15, donner à $\Delta$ le signe $-$, d'où résultera $\Delta=-1$. Substituant ces valeurs dans l'équation $(p'')$, il viendra

$$q^2-2h''e+e^2-4\frac{1-i}{i}h''e-4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2=A-B+C-D+G. \qquad (r'')$$

Soustrayons membre à membre cette équation de la précédente, nous aurons d'abord

$$4\frac{1-i}{i}h''e+4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2=2D,$$

puis, en divisant par 2 et transposant,

$$D=2\left[\frac{1-i}{i}h''e+\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2\right].$$

Or cette valeur de D est précisément celle qui fait partie des équations $(n'')$; il est donc seulement nécessaire de vérifier la relation $(q'')$ pour que les deux équations $(q'')$ et $(r'')$ se trouvent à la fois vérifiées.

Il suffit de jeter un coup d'œil sur les équations $(n'')$ pour voir que la somme des termes de l'ordre de $q^2$ contenus dans les seconds membres, en y changeant le signe de B, se réduit effectivement à $q^2$, ainsi que l'exige la relation $(q'')$. La somme des coefficients des termes du premier ordre qui ont tous $h''e$ pour facteur est $-2+2\frac{1+i}{i}-\frac{4}{i}+2\frac{1-i}{i}$, somme qui se réduit évidemment à $-2$, comme dans l'équation $(q'')$. Enfin, cette même équation exige que la somme des coefficients de $e^2$, dans le second membre de $(n'')$, se réduise à l'unité. Or cette somme est

$$\frac{1}{i^2}\left[2i-\frac{26}{3}i+\frac{32}{3}i+3i^2-4i^2-1+3-4+2(1-i)^2\left(\frac{h''^2}{q^2}-\frac{2h''^2}{q^2}+1+\frac{h''^2}{q^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{i^2}\left[4i-i^2-2+2(1-i)^2\right]=\frac{1}{i^2}(4i-i^2-2+2-4i+2i^2)=\frac{i^2}{i^2}=1.$$

On pourrait encore appliquer l'équation $(p'')$ aux ordonnées extrêmes $y''=\Theta+\frac{1-i}{i}e$, et $y''=-\left(\Theta-\frac{1-i}{i}e\right)$ pour lesquelles on a $\operatorname{tang}\varphi=\pm\infty$ et $\sin^2\varphi=1$; mais alors on a $\Delta=\pm\sqrt{1-c^2}$, ou, d'après la note du n° 19, $\Delta=\pm\frac{\sqrt{B-C}}{\sqrt{B}}$, et la vérification ne pourrait s'opérer algébriquement qu'au moyen de développements fort longs dans lesquels nous nous dispenserons d'entrer, pensant que les vérifications précédentes et la comparaison des valeurs numériques fournies par l'équation $(o'')$ avec de nombreux tracés déduits de l'expression $(w)$ du rayon de courbure, prouvent suffisamment l'exactitude de nos formules.

### DÉTERMINATION DES CONSTANTES.

22. Avant de nous livrer à l'examen des deux cas principaux que présente la question des arches de pont, lesquels sont ceux

des arches dites *en arc de cercle* et des arches *en anse de panier*, nous croyons devoir résumer ici les diverses formules auxquelles nous sommes parvenu dans les numéros précédents, en les présentant dans l'ordre de leur application, et modifiant l'expression de quelques coefficients suivant les indications fournies par la note du n° 19 ; et cela, dans le but d'éviter de faire dépendre un coefficient de la différence de grands nombres peu différents. Il résulte de cette note que l'on a

$$B = M^2, \quad C = 2K, \quad c^2 = \frac{C}{B}.$$

Or, d'après la note du n° 15, on a d'ailleurs

$$M^2 = N^2 + 2K,$$

et, par suite,

$$B = M^2 = N^2 + C.$$

Enfin, nous avons trouvé, n° 17,

$$\Theta^2 - M^2 = 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{H^2}{q^2} e^2;$$

il en résulte

$$\Theta^2 = M^2 + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{H^2}{q^2} e^2 = B + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(2 + \frac{k''^2}{q^2}\right) e^2.$$

Nous nous servirons de ces relations pour déduire des équations $(r)$, $(s)$, $(l')$, $(o')$, $(n'')$, $(o'')$, et $(x)$, les formules qui vont figurer dans le tableau suivant :

*Tableau des formules relatives à l'équation de la courbe intrados.*

$$h'' = h + e$$

$$q^2 = 2\frac{e\mu_0}{i}$$

$$N^2 = h''^2 + 2\frac{1-i}{i}h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(1 + 2\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2$$

$$A = h''^2 + q^2 - 2h''e + \frac{2i-1}{i^2}e^2$$

$$C = 2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i - i^2 - 1 - (1-i)^2\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right]$$

$$B = C + N^2$$

$$D = 2\left[\frac{1-i}{i}h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]$$

$$G = 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{q^2}e^2$$

$$\Theta^2 = B + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(2 + \frac{h''^2}{q^2}\right)e^2$$

$$c^2 = \frac{\Theta}{B} \qquad (s'')$$

$$\tan^2\varphi = \frac{\Theta^2}{N^2}\,\frac{(y''-h'')\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)}{\Theta^2 - \left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2}$$

$$\Delta^2 = 1 - c^2\sin^2\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} F(c,\varphi) &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta} \\ E(c,\varphi) &= \int_0^\varphi \Delta\, d\varphi \end{aligned}\right\}$$ par les formules du n° 20, ou par les Tables de fonctions elliptiques.

$$\sqrt{B}.x'' = A.F(c,\varphi) - B.E(c,\varphi) + C\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} + D\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2} + G\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3}$$

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'' = \frac{i}{6}\frac{e}{\mu_0}y''.$$

Il résulte de l'inspection de ce tableau, que si l'on considère comme donné le rapport $i$ de la densité du massif à celle de la voûte, les formules qui le composent ne se trouvent renfermer d'autres constantes indéterminées que les trois quantités $e$, $\mu_0$ et $h$.

23. Les données ordinaires d'un projet d'arche sont : la demi-ouverture, la hauteur sous clef à partir des naissances, ou la flèche, puis la hauteur de la charge au-dessus de la clef, que nous avons désignée par $h$. (Nous verrons, dans la deuxième partie, comment on ramène à dépendre de ces données, la solution des questions où l'une d'elles serait remplacée par une condition relative à la différence de niveau des naissances et de la chaussée.) Il résulte de cette énumération, que le nombre des inconnues à déterminer se réduit effectivement aux deux seules quantités $e$ et $\mu_0$. Souvent on se dispense d'avoir égard à la charge $h$ dans le calcul d'une arche, et cependant elle mérite plus d'attention. Disons d'abord que la hauteur de cette charge provient ordinairement, dans les ponts, d'un lit de maçonnerie en béton, reposant sur le plan horizontal tangent à l'extrados, d'une couche de cailloux, d'une autre de gravier, d'une couche de sable, et enfin du pavé lui-même, quant à la chaussée; dans les ponts-canaux, plusieurs de ces couches sont remplacées par une couche d'eau. Nous supposerons remplacée, pour le calcul, la hauteur de chacune d'elles par la hauteur d'une couche de la matière du massif qui aurait le même poids, ce qui se fera en la multipliant par le rapport de sa densité propre à celle du massif; et ce sera la somme de ces hauteurs réduites que nous désignerons par $h$.

Actuellement, distinguons les deux espèces d'arches dont nous devons nous occuper. L'équation de l'intrados que nous avons obtenue ci-dessus est celle d'une courbe qui diffère assez du cercle pour qu'on ne doive pas nous supposer l'intention de lui substituer un arc de cercle, même vers le sommet : néanmoins, pour éviter toute confusion, nous désignerons par *arches incomplètes* celles du genre des arches dites *en arc de cercle,* dans lesquelles les tangentes extrêmes à l'intrados réel feront, avec l'horizontale,

un angle moindre que 90°; et nous nommerons *arches complètes* les arches *en anse de panier* où ces tangentes extrêmes sont verticales. Ces dénominations se justifient par la considération des angles que font les tangentes menées au sommet et aux extrémités de l'intrados.

Soient $f$ et $g$ la flèche et la demi-ouverture données. Dans le cas des *arches incomplètes*, se donner ces deux quantités, revient à faire passer la courbe intrados par un point donné dont la position est celle des naissances, et il ne peut résulter de l'expression des coordonnées $x''$ et $y''$ en fonction de $f$ et $g$, qu'une seule équation de condition entre les données et les inconnues du problème; d'où il suit que, dans les arches dont il s'agit, on peut prendre arbitrairement l'une des quantités $e$ et $\mu_0$. Dans le cas des *arches complètes*, outre cette condition résultant des données $f$ et $g$, il en existe une autre introduite par la verticalité des tangentes extrêmes, et qu'on exprimera en écrivant dans l'équation propre à fournir le maximum de l'abscisse de l'intrados réel, à la place de $y''$, sa valeur en fonction de $f$. On a donc ici deux conditions qui suffiront pour déterminer $e$ et $\mu_0$.

La constante $\mu_0$ est la valeur au sommet de l'arche, de la variable $\mu$ dont nous avons expliqué le caractère au n° 6. Cette variable exprime, ainsi que nous l'avons dit, la hauteur d'une colonne de la matière des voussoirs dont le poids produirait sur une base horizontale la pression qui a lieu dans les joints normaux. Cette quantité, d'après l'expression ($v$), croît depuis le sommet de l'arche avec les ordonnées, et il importe que la plus grande valeur qu'elle puisse prendre ne dépasse jamais une certaine limite fixée par la résistance des matériaux employés. Nous désignerons par $\mu_1$ la valeur de $\mu$ au point inférieur de la voûte, ou dans le joint des naissances. Il est bon de connaître à peu près la plus grande des valeurs de $\mu$ ou de $\mu_1$ qu'on puisse adopter. Or Navier, dans son *Résumé des leçons sur l'application de la Mécanique*, n° 176, fixe la limite des pressions que l'on peut employer avec sécurité dans les arches, à 610 kilogrammes pour une surface de 25 centimètres

carrés. On en déduit $\mu = 100$ mètres, si l'on prend pour poids du mètre cube, $\varpi = 2440$ kilogrammes; c'est le poids du liais de Bagneux : les autres pierres employées aux environs de Paris donneraient des valeurs de $\mu$ un peu plus fortes, à cause de leur moindre densité. Suivant Navier, on ne s'exposerait donc point à trop charger les voûtes, toutes les fois que $\mu$ ou $\mu_1$ ne dépasserait pas 100 mètres. Il va sans dire que les matériaux employés doivent présenter, quant à la résistance, les qualités des pierres employées dans les bonnes constructions, comme celles que Navier a dû avoir en vue, lorsqu'il a énoncé son assertion. Nous pouvons présenter un exemple frappant dans lequel on reconnaîtra facilement que la limite $\mu = 100$ mètres a été dépassée; les piliers prismatiques de l'aqueduc de Spolette ont plus de 100 mètres de hauteur, et sont chargés d'une énorme construction à leur partie supérieure : il est facile d'en conclure, malgré le défaut d'indications sur la dureté et la densité des pierres employées, que la valeur de $\mu$ à la partie inférieure des piliers, doit excéder 100 mètres.

Nous allons maintenant tirer de l'équation $(v)$ une relation entre $\mu_0$ et $\mu_1$. Cette équation est

$$\mu - \mu_0 = y'' - h'' + \frac{i}{3\mu_0}(y''^2 - h''^2);$$

nous rappellerons qu'on y a négligé les termes du deuxième ordre qui se trouveraient être du troisième par rapport à $\mu$ : or, si nous négligeons les différences des coordonnées de l'intrados réel et de l'intrados fictif, qui sont du deuxième ordre de petitesse, nous aurons, à ces différences près, au point inférieur de l'intrados,

$$y'' - h'' = f,$$

d'où

$$y'' + h'' = f + 2h'',$$

et

$$\frac{y''^2 - h''^2}{\mu_0} = \frac{f(f + 2h'')}{\mu_0};$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, et écrivant $\mu_1$ au lieu de $\mu$, on en déduira

$$\mu_1 = \mu_0 + f + i\,\frac{f(f+2h'')}{3\mu_0}: \qquad (t'')$$

on tire inversement de cette équation

$$\mu_0 = \mu_1 - f - i\,\frac{f(f+2h'')}{3(\mu_1 - f)}, \qquad (u'')$$

expression dans laquelle $f$ pourrait être négligé devant $\mu_1$ au dénominateur du dernier terme.

L'usage de ces équations est facile à saisir : dans le cas des *arches incomplètes* où $\mu_0$ est arbitraire, on fixera la limite $\mu_1$ arbitrairement, mais de sorte qu'elle ne dépasse pas 100 mètres par exemple, et l'on déduira $\mu_0$ de l'équation ($u''$). Lorsqu'il s'agira d'*arches complètes*, et que $\mu_0$ et $e$ auront été déterminés de manière à satisfaire aux deux conditions énoncées plus haut, on fera usage de l'équation ($t''$) pour calculer $\mu_1$ et s'assurer que sa valeur ne dépasse pas la limite de $\mu$ qu'on aura adoptée; si elle la dépassait, il faudrait nécessairement modifier les données du projet.

### CAS DES ARCHES *INCOMPLÈTES*, DITES *EN ARC DE CERCLE*.

24. Nous avons vu dans le numéro précédent qu'une des deux constantes $e$ et $\mu_0$ reste arbitraire dans les *arches incomplètes* : cela résultera avec évidence des calculs qui vont suivre. En général, on n'a aucune raison de se donner *a priori* l'épaisseur à la clef, ou en un joint quelconque, tandis qu'au contraire on est intéressé, dans le but d'économiser les matériaux, à utiliser leur résistance, à faire supporter à chaque joint la plus grande charge possible par unité de surface. Il est clair, en effet, qu'un joint devant résister à une charge totale déterminée, si la pression par unité de surface est inférieure à celle maximum que la pierre

ou le mortier pourraient supporter sans inconvénient, la surface du joint, et par suite, le volume du voussoir seront plus grands que si la pression par unité de surface était portée au maximum, la pression totale restant la même. Nous ajouterons, à ce sujet, une observation qui eût peut-être été mieux placée ailleurs, c'est que la condition que la résultante des pressions passe par le milieu de l'épaisseur est également favorable à la diminution de l'étendue des surfaces de joint; cela résulte de ce que la pression par unité de surface va en augmentant vers les extrémités de la surface de joint dont se rapproche la résultante des pressions : en effet, lorsqu'elle a atteint son maximum vers ces points, elle se trouve, dans les autres, plus ou moins au-dessous de ce maximum, et la pression totale devient moindre que pour un joint d'égale étendue dans lequel la résultante des pressions passerait par le milieu, et où la pression par unité de surface serait portée à la même valeur maximum que dans le premier. Donc, si la pression totale que supporte le premier est donnée, en faisant passer la résultante des pressions par le milieu du joint, on pourra réduire son étendue sans augmenter la pression maximum par unité de surface.

Ces considérations doivent engager les ingénieurs à adopter autant que possible les plus grandes valeurs des pressions par unité de surface dans les joints, ou de la quantité $\mu$ qui les représente. On pourra se donner généralement $\mu_1$ *a priori*, pourvu qu'il n'excède pas 100 mètres suivant Navier, et l'on déduira $\mu_0$ de l'équation $(u'')$ que nous reproduisons en y joignant sa relation avec $q^2$ :

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 &= \mu_1 - f - i\,\frac{f(f+2h'')}{3(\mu_1 - f)}, \\ q^2 &= 2\,\frac{e\,\mu_0}{i}. \end{aligned}\right\} \quad (v'')$$

Disons cependant qu'on pourrait au besoin profiter de ce que la quantité $\mu_0$ reste arbitraire pour l'assujettir à quelque condition particulière.

Il reste maintenant à déterminer $e$. Nous allons former une équation entre cette quantité, la flèche $f$ et l'ordonnée du point inférieur de l'intrados, que nous désignerons par $y''_1$. Rappelons que l'intrados fictif et l'intrados réel sont distants de la quantité $2\delta$, différence entre l'épaisseur réelle $\varepsilon$ et l'épaisseur fictive $e$, mesurée suivant la normale [voir équation $(e)$]. Il en résulte que la valeur de l'ordonnée du point inférieur de l'intrados réel est

$$y''_1 + 2\delta_1 \cos\alpha_1,$$

en désignant par l'indice 1 les quantités qui se rapportent à ce point. L'ordonnée du sommet de l'intrados réel est

$$h'' + 2\delta_0;$$

mais la différence de ces ordonnées est égale à la flèche $f$, d'où il suit que l'on a

$$f = y''_1 - h'' - 2\delta_0 + 2\delta_1 \cos\alpha_1:$$

mettant ici pour $2\delta_0$ et $2\delta_1$ leurs valeurs tirées de $(x)$, et prenant la valeur de $y''_1$, il vient

$$y''_1 = f + h'' + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(h'' - y''_1 \cos\alpha_1).$$

Or le dernier terme du second membre étant du deuxième ordre, on peut y substituer à $y''_1$ et $\cos\alpha_1$ leurs expressions privées des termes du premier et du deuxième ordre. Remplaçant d'abord $h''$ par $y''_1 - f$, la parenthèse devient

$$y''_1(1 - \cos\alpha_1) - f;$$

mettant ensuite pour $1 - \cos\alpha_1$ sa valeur approchée $\frac{y_1''^2 - h''^2}{q^2}$ ou

$\frac{f(f+2h'')}{q^2}$, et $f+h''$ à la place de $y''_1$, l'expression précédente se réduit à

$$-f\left(1-\frac{(f+h'')(f+2h'')}{q^2}\right),$$

et il vient finalement

$$y''_1 = f+h''-\frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}f\left[1-\frac{(f+h'')(f+2h'')}{q^2}\right]. \qquad (w'')$$

On pourra le plus souvent négliger le dernier terme de cette expression.

Soit de même $x''_1$ l'abscisse du point inférieur de l'intrados fictif, on aura évidemment

$$x''_1 = g+2\delta_1 \sin\alpha_1,$$

et la valeur de $\sin\alpha_1$ dans cette équation pourra se déduire de celle de $1-\cos\alpha_1$ obtenue plus haut en négligeant les termes du premier et du deuxième ordre : nous aurons ainsi les deux relations

$$1-\cos\alpha_1 = \frac{f(f+2h'')}{q^2},$$

$$1+\cos\alpha_1 = 2-\frac{f(f+2h'')}{q^2},$$

d'où, en multipliant membre à membre et extrayant ensuite les racines,

$$\sin\alpha_1 = \sqrt{1-\cos^2\alpha_1} = \sqrt{\frac{f(f+2h'')}{q^2}\left[2-\frac{f(f+2h'')}{q^2}\right]}.$$

La première des deux équations précédentes donnerait d'ailleurs la valeur approchée de $\frac{1}{2}\alpha_1$, en l'écrivant comme il suit :

$$\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{f(f+2h'')}{2q^2}.$$

On a enfin

$$2\delta_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(f + h'').$$

La valeur ci-dessus de $x''_1$, en passant tous les termes dans le premier membre, donne l'équation de condition

$$x''_1 - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(f + h'')\sqrt{\frac{f(f+2h'')}{q^2}\left[2 - \frac{f(f+2h'')}{q^2}\right]} - g = 0, \quad (x'')$$

dans laquelle le second terme sera le plus souvent négligeable.

C'est maintenant du système des équations $(s'')$ jointes à $(v'')$, $(w'')$ et $(x'')$, qu'il s'agit de tirer la valeur de l'inconnue $e$. On comprend l'impossibilité de l'élimination et la nécessité de recourir aux méthodes de tâtonnements ou d'approximations successives. On pourra y procéder, soit en s'aidant de tracés fondés sur l'expression $(w)$ du rayon de courbure $\rho''$, soit au moyen des seuls calculs numériques. Voici, en nous en tenant pour le moment à ces derniers, comment il faudra s'y prendre : on attribuera à l'inconnue $e$ une valeur hypothétique plus ou moins approchée, dont nous allons bientôt donner le moyen de fixer les limites; puis, s'étant donné $\mu_1$ dans les limites indiquées plus haut, on calculera $\mu_0$, $q^2$ et $y''_1$ par les équations $(v'')$ et $(w'')$; on calculera ensuite $x''$ par le système des équations $(s'')$ dans lesquelles on fera $y'' = y''_1$, et l'on substituera cette valeur pour $x''_1$, dans le premier membre de l'équation $(x'')$ qui devrait s'annuler, si la valeur hypothétique de $e$ d'où l'on est parti se trouvait être égale à celle cherchée. Comme il n'en sera pas généralement ainsi, on fera varier ensuite cette quantité, et l'on recommencera les calculs, ce qui donnera, pour le premier membre de $(x'')$, un résultat différent du précédent : une simple proportion suffira pour corriger en grande partie l'erreur de $e$; et, si l'on substitue la valeur qui a subi une première correction, on aura un troisième résultat déjà beaucoup plus voisin de zéro que les deux premiers. Enfin ces trois résultats fourniront un moyen de corriger la valeur de $e$ au-

tant qu'il est nécessaire, soit en employant les courbes d'erreurs, soit en ayant recours à tout autre procédé d'interpolation. (Nous avons indiqué un de ces procédés déduit du théorème de Taylor, au § XLVI de l'*Équilibre des voûtes en berceaux cylindriques*, troisième article.)

### LIMITES DE LA VALEUR DE $e$, DANS LES ARCHES *INCOMPLÈTES*, DITES *EN ARC DE CERCLE* (*).

25. Nous obtiendrons une limite inférieure de la valeur de $e$, en partant de cette considération, que le rayon de courbure de l'intrados au sommet est plus grand que le rayon du cercle passant par les naissances et tangent à l'intrados en son sommet. Cette assertion se vérifie aisément : en effet, d'après l'équation ($w$) dans laquelle on fera, pour plus de simplicité, abstraction des termes du premier et du deuxième ordre, le rayon de courbure va en décroissant à partir du sommet de l'intrados. Or, si le rayon de courbure au sommet était égal à celui de l'arc tangent et passant par les naissances, la diminution du rayon de courbure ne permettrait pas à la courbe d'atteindre les naissances, et celle-ci serait embrassée par l'arc de cercle dont le rayon est constant; il en serait de même *a fortiori* si le rayon de courbure de l'intrados se trouvait au sommet être plus petit que le rayon de l'arc tangent. Donc, pour que l'intrados passe par les naissances, il faut que ce rayon de courbure au sommet excède le rayon de l'arc tangent. On peut conclure de là que l'intrados embrasse l'arc de cercle vers le sommet, et de ce qu'ils passent tous deux par les naissances, il résulte que l'angle de la tangente extrême à l'intrados, avec l'axe des $x$, excède celui de la tangente à l'arc de cercle

(*) *P. S.* Les Tables que nous donnons à la fin de la deuxième partie de ce Mémoire dispenseront de recourir aux formules proposées aux n$^{os}$ 25 et 27 pour obtenir une valeur approchée de l'inconnue $e$, dans le cas de $i = 1$. Si le rapport $i$ ne différerait pas trop de l'unité, la solution déduite des mêmes Tables serait une solution approchée qui dispenserait encore de l'emploi de ces formules.

avec le même axe, ou bien que la normale à l'extrémité de l'intrados fait avec l'axe des $y$ un angle plus grand que celui de la normale au cercle menée par le même point. Cette dernière remarque fournit le moyen de fixer une limite supérieure de la valeur de $e$.

Dans les calculs relatifs à ces limites, nous regarderons les *intrados* réel et fictif comme se confondant en une même courbe, et nous négligerons les termes du deuxième ordre.

Soient $\rho''_0$ le rayon de courbure de l'intrados au sommet, et $r$ celui du cercle tangent à l'intrados en ce point et passant par les naissances.

La première proposition s'exprime analytiquement par l'inégalité

$$\rho''_0 > r.$$

Or on a entre la flèche, la demi-ouverture et le rayon $r$, l'équation

$$g^2 = f(2r - f),$$

d'où l'on tire

$$2r = \frac{g^2 + f^2}{f};$$

d'un autre côté, si nous faisons $y'' = h'' = h + e$ et $\cos\alpha = 1$ dans l'équation $(w)$, nous aurons

$$2\rho''_0 = \frac{q^2 - 2eh - \frac{4}{3}\frac{e^2}{i}}{h + \frac{e}{i}}: \qquad (y'')$$

substituons ces valeurs dans l'inégalité $2\rho''_0 > 2r$ équivalente à la première, et pour $q^2$ sa valeur $2\frac{e\mu_0}{i}$, il viendra

$$2e\,\frac{\frac{\mu_0}{i} - h - \frac{2}{3}\frac{e}{i}}{h + \frac{e}{i}} > f\left(1 + \frac{g^2}{f^2}\right),$$

d'où

$$2e\left[\mu_0 - ih - \frac{2}{3}e - \frac{f}{2}\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)\right] > ihf\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right),$$

et, *a fortiori*,

$$2e\left[\mu_0 - ih - \frac{1}{2}f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)\right] > ihf\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right).$$

On en tire

$$e > ih\,\frac{f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)}{2(\mu_0 - ih) - f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)}. \qquad (z'')$$

Telle est la limite inférieure de $e$. Quant à la limite supérieure, elle se déduira de l'autre proposition, qu'on pourra traduire de cette manière : le cosinus de l'angle $\alpha_1$ de la normale extrême à l'intrados avec l'axe des $y$, est plus petit que celui de la normale au cercle; or ce dernier cosinus a pour expression $\frac{r-f}{r}$ ou $1 - \frac{2f^2}{2fr}$; mais à cause de la valeur ci-dessus de $2r$ ou de $2rf$, la valeur de ce cosinus est $1 - \frac{2f^2}{g^2+f^2}$; on a donc l'inégalité

$$\cos\alpha_1 < 1 - \frac{2f^2}{g^2+f^2}.$$

Substituons à la place de $\cos\alpha_1$, sa valeur $(u)$, en y mettant pour $y''$ la valeur $y'$, donnée par l'équation $(w'')$, puis $h+e$ à la place de $h''$, et négligeons les termes du deuxième ordre; il viendra

$$\frac{1 - \frac{f(f+2h)+2e(f+h)}{q^2}}{1 - \frac{2e}{q^2}\left(h - \frac{1-i}{i}f\right)} < 1 - 2\,\frac{1}{1+\frac{g^2}{f^2}},$$

ou, en développant et réduisant,

$$-\frac{f(f+2h)}{q^2} < \frac{2ef}{iq^2} - 2\,\frac{1}{1+\frac{g^2}{f^2}} + \frac{4e}{q^2}\,\frac{h - \frac{1-i}{i}f}{1+\frac{g^2}{f^2}}.$$

Cette inégalité sera vraie, à plus forte raison, si, pour simplifier, on supprime au dernier terme la quantité $\frac{1-i}{i}f$, qui sera positive dans les cas ordinaires de la pratique; multipliant ensuite tout par $q^2$ ou par sa valeur $2\frac{e\mu_0}{i}$, il viendra

$$e < \frac{i}{2}\,\frac{f(f+2h)\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)}{2(\mu_0-ih)-f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)}, \qquad (a''')$$

inégalité qui donne la limite supérieure de la valeur de $e$. Cette limite et celle précédemment déterminée laissent entre elles un intervalle assez considérable : nous indiquerons, sans toutefois en garantir la généralité, un moyen de déduire de ces limites une valeur approchée de $e$; il consiste à doubler la limite inférieure, prendre la moitié de celle supérieure, et ensuite la moyenne des deux résultats, ce qui revient à ajouter à la limite inférieure le quart de la limite supérieure, ou à prendre pour valeur approchée de $e$, l'expression

$$\frac{\frac{i}{8}f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)(f+10h)}{2(\mu_0-ih)-f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)}.$$

Le calcul des valeurs limites ou de la valeur approchée de $e$, suppose qu'on a préalablement calculé $\mu_0$ par la formule $(v'')$, au moyen de la quantité donnée $\mu_1$. La correction de la valeur approchée s'opère ainsi qu'il a été dit au numéro précédent.

### CAS DES ARCHES *COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

26. Nous avons fait voir au n° 23 comment les deux conditions résultant d'une flèche et d'une demi-ouverture données, jointes à celle de la verticalité des tangentes extrêmes, suffisaient pour déterminer les deux constantes inconnues $e$ et $\mu_0$. Pour plus

de simplicité, nous substituerons à l'inconnue $\mu_0$ la quantité $q^2$, liée à celle-ci par la relation

$$q^2 = 2\frac{e\mu_0}{i},$$

de sorte qu'ayant déterminé $q^2$ et $e$, on déduira de cette équation la valeur de $\mu_0$.

Nous exprimerons d'abord que la tangente extrême à l'intrados *réel* est verticale. Pour cela, observons que l'abscisse d'un point quelconque de cette courbe a pour expression

$$x'' - 2\delta \sin\alpha;$$

nous aurons donc aux naissances de cet intrados,

$$d(x'' - 2\delta \sin\alpha) = 0,$$

d'où

$$\frac{dx''}{dy''} - \sin\alpha \frac{d.2\delta}{dy''} - 2\delta \cos\alpha \frac{d\alpha}{dy''} = 0.$$

Or nous avons, par l'une des équations $(x)$,

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'';$$

on en tire

$$\frac{d.2\delta}{dy''} = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = \frac{2\delta}{y''}.$$

D'un autre côté, l'on a

$$\frac{dx''}{dy''} = \cot\alpha, \quad d\alpha = \frac{ds''}{\rho''}, \quad \frac{d\alpha}{dy''} = \frac{1}{\rho''}\frac{ds''}{dy''} = \frac{1}{\rho''\sin\alpha};$$

substituant ces valeurs, il vient

$$\cot\alpha - \frac{2\delta}{y''}\sin\alpha - \frac{2\delta}{\rho''}\cot\alpha = 0,$$

ou

$$1 - \frac{2\delta}{y''}\sin\alpha \tang\alpha - \frac{2\delta}{\rho''} = 0,$$

et, par suite,

$$\sin\alpha \tang\alpha = \frac{y''}{2\delta}\left(1 - \frac{2\delta}{\rho''}\right).$$

Il y aurait à substituer à $2\delta$, $\alpha$ et $\rho''$, leurs valeurs en fonctions de $y''$, et à tirer la valeur de cette ordonnée; mais nous opérerons plus simplement. L'équation précédente montre que le produit $\sin\alpha \operatorname{tang}\alpha$ est très-grand, ou que $\alpha$ est voisin de 90°, comme on pouvait le prévoir. Cette circonstance permet de faire $\sin\alpha = 1$ et de négliger $\frac{2\delta}{\rho''}$ devant l'unité au deuxième membre : on a alors

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y''}{2\delta}.$$

Éliminant $\operatorname{tang}\alpha$ entre cette équation et l'équation $(a')$, il viendra

$$\frac{y''}{2\delta} = \frac{R}{q^2 + (h'' - e)^2 - y''^2},$$

ou bien en affectant de l'indice 1, les variables de cette expression qui répondent aux naissances de l'intrados *réel*, et prenant la valeur du dénominateur du second membre,

$$q^2 + (h'' - e)^2 - y_1''^2 = \frac{2\delta_1}{y''_1} R_1.$$

Désignons actuellement par $y''_2$ l'ordonnée du point de l'intrados *fictif* où la tangente est verticale, et pour lequel on a $\cot\alpha = 0$, la même équation $(a')$ fournira la relation

$$y_2''^2 = q^2 + (h'' - e)^2,$$

ou, à cause de $h'' - e = h$,

$$y_2''^2 = q^2 + h^2.$$

Cette valeur permet de mettre l'équation précédente sous la forme

$$y_2''^2 - y_1''^2 = \frac{2\delta_1}{y''_1} R_1,$$

d'où

$$y''_2 - y''_1 = \frac{2\delta_1 R_1}{y''_1 (y''_2 + y''_1)}.$$

La différence des ordonnées des points de l'intrados *fictif* correspondants aux tangentes verticales des deux intrados est, comme on le voit, une quantité du deuxième ordre, ce qui permet de substituer dans le second membre $y''_2$, $\delta_2$ et $R_2$ à $y''_1$, $\delta_1$ et $R_1$, puis à ces quantités, leurs valeurs en y négligeant les termes du premier ordre; de cette manière, on a d'abord

$$y''_2 - y''_1 = \frac{\delta_2}{y_2''^2} R_2.$$

Actuellement, la valeur $(z)$ de $R^2$ devient

$$R_2^2 = (y_2''^2 - h''^2)(2q^2 - y_2''^2 + h''^2),$$

et, en ayant égard à la valeur de $y_2''^2$,

$$R_2^2 = [q^2 - (h''^2 - h^2)][q^2 + h''^2 - h^2],$$

ou

$$R_2^2 = q^4 - (h''^2 - h^2)^2;$$

mais à cause de $h'' - h = e$, le dernier terme de cette expression est du deuxième ordre, ce qui la réduit à $q^4$. Substituant cette valeur et celle de $\delta_2$ dans la différence ci-dessus, il vient

$$y''_2 - y''_1 = \frac{1}{6}\frac{e^2}{y''_2},$$

ou, à cause de $y_2''^2 = q^2 + h^2$,

$$y''_2 - y''_1 = \frac{1}{6}\frac{e^2}{\sqrt{q^2 + h^2}}.$$

On en déduit finalement

$$y''_1 = \sqrt{q^2 + h^2} - \frac{1}{6}\frac{e^2}{\sqrt{q^2 + h^2}}.$$

Quant à l'angle $(90° - \alpha_2)$ du dernier joint avec l'horizontale,

il se déduira de la valeur de tang$\alpha$ obtenue plus haut, et l'on aura

$$\text{tang}\,(90^\circ - \alpha_1) = \frac{1}{3}\,\frac{e^2}{q^2}.$$

Maintenant nous allons faire usage d'une autre expression de $y''_1$, que nous avons formée pour le cas des *arches incomplètes;* elle est

$$y''_1 = f + h'' + \frac{1}{3}\,\frac{e^2}{q^2}\,(h'' - y''_1 \cos\alpha_1):$$

or l'expression de tang$\alpha$ donne $y''_1 \cos\alpha_1 = 2\,\delta_1 \sin\alpha_1$; cette valeur n'introduirait dans $y''_1$ qu'un terme du quatrième ordre, nous devons donc n'en tenir aucun compte, de sorte que la valeur précédente se réduit à

$$y''_1 = f + h'' + \frac{1}{3}\,\frac{e^2}{q^2}\,h''.$$

Il s'agit actuellement d'éliminer $y''_1$ entre cette équation et celle obtenue plus haut qui exprime la valeur de la même quantité. Cette dernière donne, en négligeant les termes du quatrième ordre,

$$y_1''^2 = q^2 + h^2 - \frac{1}{3}\,e^2. \qquad (c''')$$

Élevons la précédente au carré et éliminons $y_1''^2$, il viendra

$$q^2 + h^2 - \frac{1}{3}\,e^2 = (f + h'')^2 + \frac{2}{3}\,h''\,(f + h'')\,\frac{e^2}{q^2};$$

on en tire, à cause de $h = h'' - e$,

$$q^2 = f(f + 2h'') + 2h''e - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{h''(f + h'')}{q^2}\right)e^2,$$

et en mettant au dernier terme, pour $q^2$, sa valeur approchée $f(f + 2h'')$,

$$q^2 = f(f + 2h'') + 2h''e - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{h''(f + h'')}{f(f + 2h'')}\right)e^2. \qquad (d''')$$

Il reste à former l'équation qui lie la flèche $f$ à la demi-ouverture $g$ : on a ici, comme dans les *arches incomplètes*,

$$x''_1 = g + 2\delta_1 \sin\alpha_1,$$

et nous avons vu qu'on peut faire $\sin\alpha_1 = 1$, tandis que l'on a

$$2\delta_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y''_1.$$

Substituons à $y''_1$ et $q^2$, leurs valeurs approchées $f+h''$ et $f(f+2h'')$, il viendra

$$2\delta_1 = \frac{1}{3}\frac{f+h''}{f(f+2h'')}e^2,$$

et l'on aura l'équation de condition

$$x''_1 - \frac{1}{3}\frac{f+h''}{f(f+2h'')}e^2 - g = 0. \qquad (e''')$$

La détermination des constantes $e$ et $q^2$ dépend maintenant de la résolution du système des équations $(d''')$, $(e''')$ et $(c''')$ jointes aux équations $(s'')$ dans lesquelles on fera $y'' = y''_1$ et $x'' = x''_1$. L'élimination ne sera pas plus praticable ici que dans l'autre cas; on sera encore réduit à l'emploi des méthodes de tâtonnement, et voici comment on devra s'y prendre :

On partira d'une valeur hypothétique de $e$ plus ou moins approchée, que nous ferons bientôt connaître; puis, au moyen de l'équation $(d''')$ dans laquelle on a $h'' = h + e$, on calculera la valeur correspondante de $q^2$. Celle de $y''_1$ sera donnée par l'équation $(c''')$ ou celle qui la précède, et l'on se servira de cette valeur particulière de $y''$ pour calculer, au moyen des équations $(s'')$, celle correspondante de $x''$ qui deviendra $x''_1$ : cette valeur devra être portée dans l'équation de condition $(e''')$ qui pourra n'être pas satisfaite. Il faudra alors avoir recours aux méthodes de correction indiquées à la fin du n° 24, pour corriger la valeur de $e$ d'où l'on est parti, et recommencer les calculs jusqu'à ce qu'on en ait dé-

terminé une qui satisfasse à l'équation ($e'''$). Toutefois, il ne faut pas oublier que la valeur de $\mu_1$ ne doit pas dépasser certaines limites dont il a été question au n° 23. On devra donc, après avoir obtenu les valeurs de $e$ et $q^2$ qui satisfont à l'ensemble des équations du problème, calculer la valeur de $\mu_0$ par l'équation

$$\mu_0 = \frac{iq^2}{2e}, \qquad (f''')$$

et en déduire celle de $\mu_1$ par l'équation ($t''$) que nous reproduisons ici,

$$\mu_1 = \mu_0 + f + i\,\frac{f(f+2h'')}{3\mu_0}, \qquad (g''')$$

ou de la suivante qu'on obtient en éliminant $\mu_0$ et $q^2$ entre celle-ci et les équations ($d'''$) et ($f'''$),

$$\mu_1 = i\,\frac{f(f+2h'')}{2e} + ih'' + f + \frac{1}{3}\left(2 - i + \frac{ih''(f+h'')}{f(f+2h'')}\right)e. \qquad (h''')$$

En changeant $h''$ en $h + e$ dans les deux premiers termes, cette expression devient

$$\mu_1 = i\,\frac{f(f+2h)}{2e} + i(f+h) + f + \frac{1}{3}\left[2(1+i) + \frac{ih''(f+h'')}{f(f+2h'')}\right]e.$$

Le dernier terme est très-petit, lors même que $e$ atteint quelques mètres; il suffit, pour cette raison, de considérer les seuls premiers termes dans la discussion de la valeur de $\mu_1$ : on reconnaît ainsi que cette grandeur $\mu_1$ est d'autant moindre que $e$ devient plus grand. Si donc la valeur trouvée de $e$ est très-grande relativement, et qu'il en résulte une valeur assez petite de $\mu_1$ ou de faibles pressions dans les joints, ce qui serait contraire aux principes de l'économie dans les constructions, on en conclura la nécessité de modifier les données. Du reste, nos formules basées sur l'hypothèse que $e$ et $\mu$ sont l'un petit et l'autre très-grand cesseraient d'être applicables.

VALEUR APPROCHÉE DE $e$ DANS LE CAS DES *ARCHES COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

27. La discussion qui nous a servi, n° 25, à fixer les deux limites de $e$, dans le cas des arches *incomplètes*, pourrait être reproduite ici; mais ce serait sans application utile à notre objet. En effet, si nous voulions appliquer les deux propositions sur lesquelles nous nous sommes appuyé pour arriver aux deux inégalités $(z'')$ et $(a''')$, nous devrions, dans les calculs qui les précèdent, remplacer $q^2$ par sa valeur $(d''')$ en $e$, et nous obtiendrions, au lieu de l'inégalité $(z'')$ qui donne une limite inférieure, l'expression d'une limite supérieure fort éloignée de la vraie valeur de $e$, et telle que nous pourrons, en partant d'autres considérations, obtenir une autre expression de la limite supérieure dont la valeur sera exactement moitié moindre.

Quant à la condition qui nous a fourni l'autre limite, et qui est exprimée par l'inégalité

$$\cos\alpha_1 < 1 - \frac{2f^2}{g^2+f^2},$$

à cause que $\cos\alpha_1$ est ici égal à zéro, elle se réduit à

$$\frac{2f^2}{g^2+f^2} < 1,$$

ou à

$$\frac{f}{g} < 1. \qquad (i''')$$

Cette condition, relative aux données seulement, ne peut rien fournir qui soit relatif aux limites de la valeur de $e$; elle conduit à cette conséquence remarquable, que les arches chargées doivent toujours être surbaissées.

Nous ne nous proposons ici que de donner une limite supé-

rieure de la valeur de $e$ qui ne différera pas considérablement de la valeur exacte. Il résulte de la comparaison de nombreux tracés de notre courbe intrados avec des demi-ellipses ayant pour demi-axes les longueurs $f$ et $g$, que l'intrados présente toujours plus de convexité vers les reins que la demi-ellipse correspondante, et que, par suite, il embrasse complétement cette dernière depuis le sommet jusqu'aux naissances. Cette circonstance indique que le rayon de courbure de l'ellipse au sommet est plus petit que celui de la courbe intrados au même point; écrivons cette inégalité, en mettant pour le rayon de courbure de l'ellipse son expression connue $\frac{g^2}{f}$, et pour le rayon de courbure de l'intrados, sa valeur $\rho''$, tirée de $(\gamma'')$, nous aurons

$$\frac{g^2}{f} < \frac{1}{2}\,\frac{q^2 - 2eh - \frac{4}{3}\frac{e^2}{i}}{h + \frac{e}{i}}.$$

Substituons pour $q^2$, sa valeur $(d''')$, et faisons disparaître le dénominateur du second membre; il viendra, à cause de $h'' = h + e$,

$$2\left(\frac{e}{i} + h\right)\frac{g^2}{f} < f^2 + 2fh + 2fe - \frac{2}{3}\left(2\,\frac{1-i}{i} - \frac{h''}{f}\,\frac{(f+h'')}{(f+2h'')}\right)e^2:$$

or, $i$ étant $< 1$, on peut le remplacer par l'unité, dans le premier membre, ce qui augmentera l'inégalité. On peut aussi négliger le terme en $e^2$ dans le second membre; car le facteur de $e^2$ est très-petit, d'abord parce que $1 - i$ et le rapport $\frac{h''}{f}$ sont très-petits, ensuite parce que les deux petits termes où entrent ces quantités sont de signes contraires et tendent à se détruire : on pourra donc écrire

$$2(e + h)\,\frac{g^2}{f} < f^2 + 2(e + h)f,$$

ou

$$2(e+h)\left(\frac{g^2}{f^2}-1\right)<f,$$

et l'on en déduit

$$e+h<\frac{1}{2}\frac{f}{\frac{g^2}{f^2}-1}. \qquad (j''')$$

L'élimination de $q^2$ entre l'équation $(d''')$ et l'inégalité $(z'')$ eût conduit à une limite supérieure de $e+h$, double de celle que nous venons de déterminer. On peut obtenir une valeur approchée de $e+h$ en prenant les $\frac{4}{5}$ de la valeur limite donnée par l'inégalité $(j''')$ (nous donnons cette indication comme ressortant de nombreux calculs et tracés); on pourra même en faire usage pour se former une idée approchée des dimensions auxquelles on arrivera au moyen de valeurs données de $f$, $g$ et $h$. La correction de la valeur de $e$ s'effectuera comme il a été dit au n° 26 (*).

S'il nous est permis de raisonner sur la valeur approchée de $e$, comme si elle était exacte, nous dirons que l'épaisseur augmente avec la flèche et aussi avec le rapport $\frac{f}{g}$, c'est-à-dire avec $f$, lorsque

(*) N. B. Les Tables qui sont à la fin du Mémoire nous ont permis de rechercher ultérieurement des formules empiriques pour calculer l'épaisseur à la clef $\varepsilon_0$, dans le cas des arches *complètes* où l'on a $i=1$. Nous avons trouvé, pour les surbaissements usités qui sont compris entre les limites $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$:

$$\varepsilon_0+h=\frac{0{,}79876\,f-0{,}22864\,g}{\frac{g^2}{f^2}-1}, \text{ à } \frac{1}{430} \text{ près};$$

$$\varepsilon_0+h=\frac{f}{\frac{g^2}{f^2}-1}\left(0{,}92241-0{,}19839\frac{g}{f}\right)^{\frac{5}{4}}, \text{ à } \frac{1}{1440} \text{ près.}$$

$g$ reste constant, et nous ajouterons que lorsqu'on aura trouvé $e$ et $\mu_1$, l'un évidemment trop grand et l'autre beaucoup au-dessous de la limite 100 mètres par exemple, il faudra, pour diminuer $e$ et augmenter $\mu_1$, diminuer la flèche, ce qui augmentera en même temps le surbaissement; il n'y aura aucune difficulté à le faire, puisqu'il suffira, d'exhausser les naissances, pour avoir la même hauteur de la clef au-dessus des eaux. Si l'épaisseur était évidemment trop petite et donnait lieu par conséquent à de très-grandes valeurs de $\mu_1$, ce serait l'indication d'un trop grand surbaissement, ou de trop petites valeurs de $f$; il serait moins facile de remédier à cet inconvénient.

Ces considérations montrent que les arches *en anse de panier* se prêtent plus difficilement aux conditions qu'on peut vouloir leur faire remplir, que les arches *incomplètes;* cela tient à ce que, dans les premières, tout se trouve déterminé au moyen des données, au lieu que, dans celles-ci, l'une des deux constantes reste arbitraire. Il ne faudra donc point s'étonner si nos formules relatives aux arches *en anse de panier* conduisent quelquefois à des valeurs de $e$ et $\mu_1$ inadmissibles dans la pratique.

La deuxième partie du Mémoire présentera des exemples propres à mettre en évidence les effets produits par la variation des données. Nous ne pouvions ici que les indiquer sommairement.

### POUSSÉE DE LA VOÛTE ET DU MASSIF CONTRE LES CULÉES.

28. Nous n'aurons que peu de mots à dire concernant les piles. En admettant que le pont se compose d'arches égales, on voit que les poussées horizontales exercées au sommet des piles se font équilibre, et que chaque pile doit résister à une action verticale égale à la somme des composantes verticales des pressions exercées sur les joints des naissances des deux arches contiguës, augmentée du poids de la partie du massif qu'elle supporte directement.

Désignons par $T_1$ la valeur de la pression totale T dans le plan des naissances, et soit toujours $\lambda$ la longueur de la voûte

parallèlement aux génératrices; on aura $T_1$ par l'équation ($k$) ou celle qui suit :

$$T_1 = \varpi \lambda e \mu_1 ; \qquad (k''')$$

la valeur de $\mu_1$ sera donnée *a priori* dans le cas des arches *incomplètes*, et par l'équation ($h''$) dans le cas des arches *complètes*. Les composantes horizontale et verticale de cette pression seront

$$T_1 \cos\alpha_1, \quad T_1 \sin\alpha_1, \qquad (l''')$$

et l'on déduira la valeur de l'angle $\alpha_1$, de l'expression de la tangente $\frac{dy''}{dx''}$, qui devient, en vertu de ($a'$) et ($d'$),

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{\sqrt{(y''_1 - h'')\left[y''_1 + h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right]\left[\Theta^2 - \left(y''_1 - \frac{1-i}{i}e\right)^2\right]}}{q^2 + (h'' - e)^2 - y_1''^2}, \qquad (m''')$$

après qu'on y aura mis pour $y''_1$, sa valeur ($w''$) dans le cas des arches *incomplètes* : dans le cas des *anses de panier*, on a

$$\operatorname{tang}(90^\circ - \alpha_1) = \frac{ie}{6\mu_0} = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}.$$

La somme des projections verticales des pressions exercées par les deux arches voisines sur une même pile, est généralement

$$2\,T_1 \sin\alpha_1.$$

Maintenant supposons que les plans de joint extrêmes des deux voûtes se rencontrent suivant les arêtes extrêmes des extrados, de sorte que la pile n'ait à supporter directement aucune partie du massif; la section horizontale de la pile sera égale à la somme des projections horizontales des surfaces de joint passant par les naissances; elle aura pour expression

$$2\,\lambda e \sin\alpha_1$$

En divisant la somme des pressions verticales par cette section, on aura pour valeur de la pression par unité de surface que supportera la pile à sa partie supérieure,

$$\frac{T_1}{\lambda e},$$

ou, d'après l'équation ($k'''$),

$$\varpi \mu_1.$$

Dans cette hypothèse, on voit que la pression par unité de surface transmise verticalement à la pile sera précisément celle qui a lieu dans le plan des naissances; de sorte que si les assises de la pile présentent la même résistance que les voussoirs inférieurs, il suffira de donner à la pile, lorsqu'on n'aura égard qu'à la charge supérieure, une section horizontale égale à la somme des projections des plans de joint extrêmes.

S'il existe un intervalle horizontal entre les deux arêtes extérieures des deux derniers plans de joint, la pile aura à supporter directement une partie du poids du massif qui donnera lieu à une pression par unité de surface de beaucoup inférieure à $\varpi \mu_1$, de sorte qu'on pourra évidemment donner à la pile toute largeur qui ne sera point inférieure à la somme des projections horizontales des épaisseurs extrêmes, lorsqu'il suffira d'avoir égard à la charge supérieure.

Quant aux culées, elles sont d'abord soumises à l'action de la force totale $T_1$ [équation ($k'''$)], faisant l'angle $\alpha_1$ avec l'axe des $x$; les coordonnées de son point d'application sont

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x''_1 + \frac{1}{2} e \sin\alpha_1, \\ y_1 &= y''_1 - \frac{1}{2} e \cos\alpha_1; \end{aligned}\right\} (n''')$$

mais les culées reçoivent en outre les actions horizontales exercées par le massif qu'elles encaissent. Pour déterminer la résul-

tante de ces actions et son point d'application, nous aurons recours à la relation ($o$) obtenue au n° 8, laquelle est

$$H' = i\varpi y',$$

$H'$ désignant la pression horizontale par unité de surface exercée par les prismes triangulaires sur les parties adjacentes du massif. L'équilibre de celui-ci exige que la culée exerce des réactions égales et opposées. La pression transmise à la culée sur une étendue superficielle verticale $\lambda dy'$ située à la profondeur $y'$, est donc

$$i\varpi\lambda y' dy',$$

et son moment

$$i\varpi\lambda y'^2 dy',$$

le tout, comme dans l'hypothèse de la fluidité.

Pour obtenir les valeurs de la résultante et de son moment, il suffit d'intégrer ces expressions entre des limites qui sont les ordonnées du sommet et du point inférieur de l'extrados : soient $y'_0$ et $y'_1$ ces ordonnées, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} y'_0 &= h, \\ y'_1 &= y''_1 - e\cos\alpha_1. \end{aligned}\right\} (o''')$$

Intégrons maintenant les expressions différentielles précédentes et désignons par U et $u$ l'intensité de la résultante et l'ordonnée de son point d'application, il viendra

$$U = \frac{i\varpi\lambda}{2}(y_1'^2 - y_0'^2), \qquad (p''')$$

$$Uu = \frac{i\varpi\lambda}{3}(y_1'^3 - y_0'^3);$$

et l'on en déduira, par division membre à membre,

$$u = \frac{2}{3}\frac{y_1'^3 - y_0'^3}{y_1'^2 - y_0'^2},$$

résultat qu'on mettra sous la forme

$$a = \frac{2}{3}\,\frac{y_0'^2 + y'_0 y'_1 + y_1'^2}{y'_0 + y'_1}, \qquad (q''')$$

afin de faire disparaître l'indétermination qui se manifesterait dans le cas où la différence de niveau $y'_1 - y'_0$ serait très-petite.

La partie de la culée située au-dessus du plan des naissances devra être construite d'après les mêmes principes que les murs de réservoirs, pour résister aux pressions élémentaires dont la force U se compose, à cela près qu'il faudra substituer la densité du massif à celle de l'eau et tenir compte de la pression représentée par la hauteur $h$ qui s'exerce au niveau du sommet de l'extrados.

Connaissant maintenant les forces $T_1$ et U, leurs directions, et les coordonnées de leurs points d'application, on aura toutes les indications que la théorie abstraite de l'équilibre de la voûte et de son massif peut fournir, pour procéder au calcul de l'établissement des culées.

CALCUL DES COORDONNÉES, INCLINAISONS DES JOINTS, RAYONS DE COURBURE, ETC.

29. Ayant déterminé par les procédés indiqués aux nos 22 et suivants, les valeurs des constantes $e$, $\mu_0$ ou $q^2$, les coordonnées des points extrêmes de l'intrados seront connues : on se trouvera dès lors en mesure de procéder au calcul des coordonnées intermédiaires et des diverses quantités qui leur correspondent; on aura en même temps un moyen de vérifier l'exactitude des calculs, si l'on emploie la méthode des différences finies, comme nous allons le faire. Il est facile de se figurer quelle difficulté il y aurait à calculer, au moyen des formules ($s''$), l'abscisse $x''$ en fonction de l'ordonnée $y''$ qu'on se donnerait arbitrairement; en admettant qu'on fît ce calcul, il resterait à faire celui de l'inclinaison des joints, par l'équation différentielle ($a'$). Le moyen que nous allons indiquer, fondé sur l'emploi du rayon de courbure, aurait pu nous dispenser, à la rigueur, d'effectuer l'intégration des

équations différentielles du problème, mais la détermination des constantes aurait présenté plus de difficultés.

Nous allons nous proposer d'abord de calculer les différences finies des coordonnées de la courbe intrados, en prenant pour variable indépendante l'angle $\alpha$ des normales avec la verticale : nous ferons varier $\alpha$ de quantités constantes que nous désignerons par $\Delta\alpha$, et les coordonnées $x''$, $y''$ du point où la normale fait l'angle $\alpha$ varieront de quantités $\Delta x''$, $\Delta y''$ qu'il s'agit de déterminer. Nous ne prétendons point donner l'expression exacte de ces différences, mais seulement des expressions dont le degré d'approximation sera d'autant plus grand que la différence $\Delta\alpha$ sera elle-même plus petite. Pour fixer les idées, nous supposerons qu'on veuille tenir compte, dans les valeurs de $\Delta x''$ et $\Delta y''$, des termes du deuxième ordre ou en $e^2$, afin qu'on soit sûr que les valeurs de $x''$ et $y''$ obtenues par les additions successives des $\Delta x''$ et $\Delta y''$ ne soient point en erreur dans les termes du premier ordre : il faudra, pour simplifier les calculs, choisir $\Delta\alpha$ de telle sorte que les termes en $\Delta\alpha$ soient, ainsi que ceux en $\Delta x''$ et $\Delta y''$, de l'ordre de $e$ ou du premier ordre. La différence $\Delta\alpha$ sera assez petite quand elle n'excédera pas de beaucoup le rapport $\frac{e}{q}$ qui s'est présenté au commencement de nos calculs comme type des quantités du premier ordre.

Ceci posé, nous déduirons les expressions de $\Delta x''$, $\Delta y''$, de celles des différentielles $dx''$ et $dy''$, en mettant à profit une proposition due, nous le croyons, à Legendre, et qu'on peut énoncer de cette manière : Si dans un système d'équations différentielles du premier ordre, on change les différentielles en différences finies, on peut donner au résultat un degré d'exactitude qui s'étende aux termes du deuxième ordre inclusivement, en augmentant en même temps chaque variable dépendante ou indépendante de la moitié de sa différence finie.

Appliquons cette proposition aux valeurs suivantes de $dx''$ et $dy''$,

$$dx'' = \rho'' \cos\alpha \, d\alpha, \qquad dy'' = \rho'' \sin\alpha \, d\alpha,$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned}\Delta x'' &= \left(\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''\right)\cos\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha,\\ \Delta y'' &= \left(\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha.\end{aligned}\right\}\ (r''')$$

Or, observons qu'en présence du facteur $\Delta\alpha$, l'expression $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ n'a besoin d'être exacte que jusqu'aux termes du premier ordre inclusivement; nous déduirons cette expression de celle $(w)$ du rayon de courbure $\rho''$, en mettant cette dernière sous la forme

$$\rho'' = \psi(y'', \alpha),$$

et désignant par $\psi$ une fonction des deux quantités $y''$ et $\alpha$. Différentions cette expression, il viendra

$$d\rho'' = \frac{d\psi}{dy''}\,dy'' + \frac{d\psi}{d\alpha}\,d\alpha;$$

si nous passons des différentielles aux différences finies, et que nous divisions tout par 2, nous aurons, aux quantités près du deuxième ordre,

$$\tfrac{1}{2}\Delta\rho'' = \frac{d\psi}{dy''}\,\frac{\Delta y''}{2} + \frac{d\psi}{d\alpha}\,\frac{\Delta\alpha}{2}:$$

ajoutons maintenant, membre à membre, cette équation et celle qui donne la valeur de $\rho''$, il viendra

$$\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'' = \psi(y'', \alpha) + \frac{d\psi}{dy''}\,\frac{\Delta y''}{2} + \frac{d\psi}{d\alpha}\,\frac{\Delta\alpha}{2};$$

mais, en vertu du théorème de Taylor, et en négligeant les termes du deuxième ordre, cette expression équivaut à

$$\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'' = \psi\left(y'' + \tfrac{1}{2}\Delta y'', \alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right). \quad (*)$$

(*) Nous aurions évité ce tour de démonstration en appliquant immédiatement la proposition de Legendre aux expressions de $dx''$ et $dy''$, mises sous la forme

$$\psi(y'', \alpha)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\alpha\,d\alpha.$$

Pour faire usage de cette formule dans le calcul des valeurs de $\Delta x''$ et $\Delta y''$, reprenons la valeur de $\rho''$ équation $(w)$, que nous écrirons comme il suit :

$$\rho'' = \frac{\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{i}h''e + \frac{2}{3i}e^2 + \frac{1-i}{i}ey'' - \left(\frac{4}{3i} - 1\right)e^2\cos\alpha}{y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\alpha}. \qquad (s''')$$

En vertu de la formule précédente et de la définition de la fonction $\psi$, nous aurons

$$\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'' = \frac{\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{i}h''e + \frac{2}{3i}e^2 + \frac{1-i}{i}e\left(y'' + \frac{1}{2}\Delta y''\right) - \left(\frac{4}{3i} - 1\right)e^2\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)}{y'' + \frac{1}{2}\Delta y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)}. \qquad (t''')$$

Cette expression, qui contient plusieurs termes constants, se simplifiera notablement dans l'hypothèse $i = 1$; mais, quoi qu'il en soit; elle renferme encore l'inconnue $\frac{1}{2}\Delta y''$ : rappelons à cet égard qu'il suffit ici d'étendre l'exactitude aux termes du premier ordre, d'où il suit qu'on peut substituer à $\frac{1}{2}\Delta y''$, sa valeur obtenue à ce degré d'approximation ; nous écrirons de cette manière

$$\frac{1}{2}\Delta y'' = \rho''\sin\alpha\,\frac{\Delta\alpha}{2}, \qquad (u''')$$

et ce sera cette valeur dont il faudra faire usage dans la formule $(t''')$.

Résumons ces diverses opérations.

Après avoir fait choix d'un intervalle $\Delta\alpha$, d'après les principes énoncés plus haut, et avoir exprimé en *rapport d'arc au rayon* cette quantité qui répondra à un petit nombre de degrés tel que 2°, 3° ou 4°, on disposera un tableau par colonnes verticales en tête desquelles on écrira les diverses valeurs de $\alpha$ qui seront équi-

distantes; deux lignes horizontales seront réservées pour inscrire les valeurs de $y''$ et $x''$ (celles de ces valeurs que l'on connaît tout d'abord répondent à $\alpha = 0$, elles sont $h'' = h + e$ et zéro); on écrira ensuite les logarithmes de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, puis de $\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)$ et $\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)$ : au moyen des valeurs inscrites dans la première colonne verticale, on calculera $\rho''$ par la formule $(s''')$, et $\frac{1}{2}\Delta y''$ par la formule $(u''')$; il sera facile ensuite de calculer $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ par la formule $(t''')$, et les équations $(r''')$ feront connaître $\Delta y''$ et $\Delta x''$. On inscrira ces diverses valeurs au fur et à mesure; puis, en ajoutant $\Delta y''$ à la valeur de $y''$ inscrite en tête de la colonne, et de même $\Delta x''$ à $x''$, on aura les valeurs de $y''$ et $x''$ qui devront être inscrites en tête de la colonne suivante. La vérification des calculs contenus dans deux colonnes verticales consécutives s'obtiendra en prenant la moyenne arithmétique des deux valeurs de $\rho''$, et comparant cette moyenne à la valeur de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ qui répond à la première des deux colonnes. Si les calculs sont exacts, ces deux résultats devront être sensiblement égaux.

On continuera de la sorte jusqu'à ce qu'on ait dépassé les valeurs de $y''_1$ et $x''_1$, dont l'une aura été employée dans le calcul des formules $(s'')$, et l'autre en sera résultée. Par interpolation, on pourra déduire des nombres contenus dans le tableau, la valeur de $x''$ correspondante à $y'' = y''_1$; et, si l'on a bien opéré, cette valeur devra coïncider avec $x''_1$, sauf quelque légère différence provenant de l'accumulation des erreurs dues aux termes du troisième ordre qu'on a négligés, en supposant que $\Delta\alpha$ ait été pris assez petit.

Les calculs étant vérifiés, on pourra compléter le tableau par la détermination des coordonnées de l'intrados réel et de l'extrados et des épaisseurs.

Le calcul des coordonnées de l'extrados se fera par les formules

$$y' = y'' - e\cos\alpha,$$
$$x' = x'' + e\sin\alpha.$$

La distance des deux intrados, suivant la normale à l'intrados fictif, est donnée par la double formule

$$2\delta = \frac{i}{6}\frac{e}{\mu_0}y'' = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y''.$$

On en déduit, pour les ordonnées et abscisses Y et X de l'intrados réel, les deux expressions

$$Y = y'' + 2\delta\cos\alpha, \quad X = x'' - 2\delta\sin\alpha.$$

Enfin les épaisseurs seront données par la formule

$$\varepsilon = e + 2\delta.$$

Ces divers calculs sont de la plus grande simplicité, et les valeurs obtenues étant réunies aux précédentes, il en résultera un ensemble propre à représenter complétement la forme et les dimensions de l'arche parvenue à son état permanent. Le problème que nous nous étions posé se trouve dès lors complétement résolu sous le rapport analytique et sous celui des applications numériques : quelques mots nous suffiront pour indiquer l'usage qu'on peut faire des procédés graphiques, dans le but d'éviter l'emploi des formules ($s''$), quand on n'a pas en vue une exactitude supérieure à celle que l'on peut obtenir en ayant recours aux tracés.

### SOLUTION DU PROBLÈME AU MOYEN DES PROCÉDÉS GRAPHIQUES.

30. La solution que nous allons donner dépend de la construction de la courbe intrados au moyen de son rayon de courbure. Il n'entre pas dans notre intention d'expliquer ici comment on trace une courbe dont le rayon de courbure est donné en fonction des coordonnées; chacun sait comment on peut remplacer un petit arc de la courbe par un arc de cercle d'une petite amplitude décrit avec le rayon de courbure correspondant au point milieu de cet arc. Nous renverrons, quant aux précautions à prendre lorsqu'on donne aux arcs une certaine amplitude, à ce que nous avons

dit sur ce sujet, dans le troisième article de notre Théorie de l'équilibre des voûtes, § XXXVI. Pour que les procédés indiqués dans cet article s'appliquent au cas actuel, il nous suffira de donner une construction du rayon de courbure : nous transformerons son équation ($w$), en posant

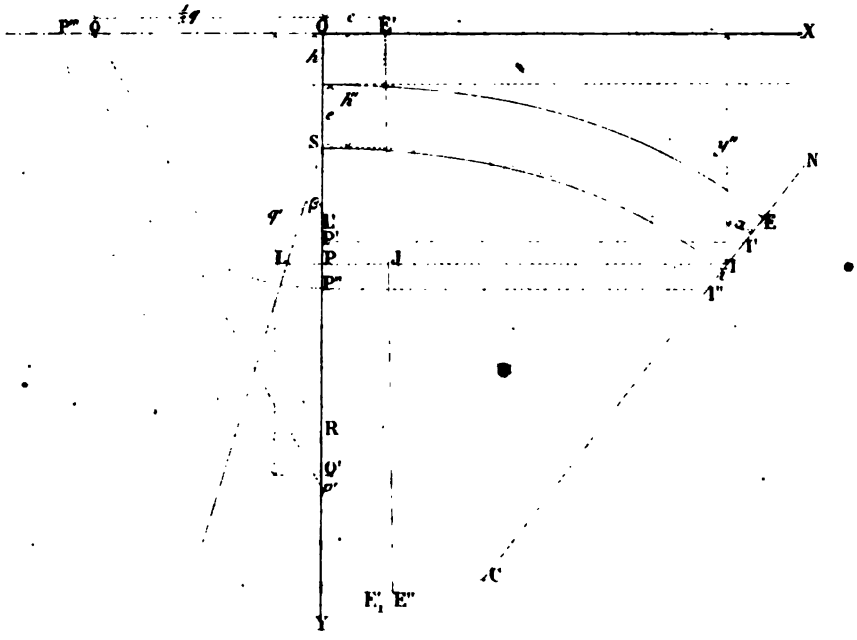
$$q' = q - \frac{2e}{q} h'' + \frac{4}{3} \frac{e^2}{iq},$$

$$\operatorname{tang}\beta = 2 \frac{1-i}{i} \frac{e}{q}, \quad a = \frac{2}{i}\left(\frac{1}{3} - i\right) \frac{e^2}{q}, \quad b = \frac{1-i}{i} e,$$

et l'équation ($w$) deviendra

$$\rho'' = \frac{1}{2} q \frac{q' + (y'' - k'') \operatorname{tang}\beta - a \cos\alpha}{y'' + b \cos\alpha}.$$

Pour construire cette expression, ayant mené deux axes OX, OY,



l'un horizontal, l'autre vertical, on fixera le sommet de l'intrados sur l'axe des $y$, à la distance $\overline{OS} = h'' = h + e$; par le point S on mènera la droite SB faisant l'angle $\widehat{BSY} = \beta$; on prendra ensuite sur le prolongement de OX une distance $\overline{OQ} = \frac{1}{2} q$, et sur OY, $\overline{OQ'} = q'$ : cette partie des constructions servira pour tous les rayons de courbure. Nous supposerons, pour plus de généralité, la construction de l'intrados fictif parvenue en un point I par lequel est menée la normale IN. Prenons sur cette normale les distances $\overline{II'} = a$, vers l'extrados; $\overline{II''} = b$, dans le sens opposé. Projetons les trois points I, I', I'' sur l'axe des $y$, et soient P, P', P'' leurs projections; nous aurons $\overline{OP} = y''$, $\overline{PP'} = a \cos\alpha$, $\overline{PP''} = b \cos\alpha$, et, par suite,

$$\overline{OP''} = y'' + b \cos\alpha.$$

Actuellement, prolongeons la droite IP jusqu'à sa rencontre avec la droite BS en L, nous aurons $\overline{PL} = (y'' - h'') \operatorname{tang}\beta$; rabattons le point L en L' sur la droite OY, de sorte qu'on ait $\overline{PL'} = \overline{PL}$, il viendra

$$\overline{P'L'} = \pm [(y'' - h'') \operatorname{tang}\beta - a \cos\alpha],$$

suivant que l'on aura $\overline{PL'} \gtrless \overline{PP'}$ : pour former le numérateur de la fraction qui multiplie $\frac{1}{2} q$, dans la valeur de $\rho''$, il reste à ajouter avec le signe convenable la quantité $\pm \overline{PL'}$ à $q'$, ce qui se fera en transportant parallèlement à elle-même la droite $\overline{P'L'}$ en $\overline{Q'p'}$, de façon que le point L' tombe en Q', et le point P' en $p'$ qui devra être situé par rapport à Q' du même côté que P' par rapport à L'. De cette manière, on aura

$$\overline{Op'} = q' + (y'' - h'') \operatorname{tang}\beta - a \cos\alpha.$$

Le rayon de courbure s'exprimera au moyen des lignes que l'on vient de construire, et l'on aura

$$\rho'' = \overline{OQ} \frac{\overline{Op'}}{\overline{OP''}}.$$

Pour éviter la construction de lignes de grandes dimensions dans le sens des $x$, ce qui obligerait à donner à l'épure de grandes dimensions à la fois dans le sens des $x$ et dans celui des $y$, nous rabattrons le point P″ en P‴ sur le prolongement de l'axe des $x$, de sorte que l'on ait $\overline{OP'''} = \overline{OP''}$. Or, si nous joignons P‴$p'$, et que nous menions QR parallèle à P‴$p'$, il est facile de voir que l'on aura $\overline{OR} = \rho''$, car les triangles semblables OQR, OP‴$p'$ donnent la relation

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{Op'}}{\overline{OP'''}}$$

qui coïncide avec l'équation précédente. La position C du centre de courbure s'obtiendra ensuite, en portant sur la normale, de I en C, la distance $\overline{IC} = \overline{OR}$.

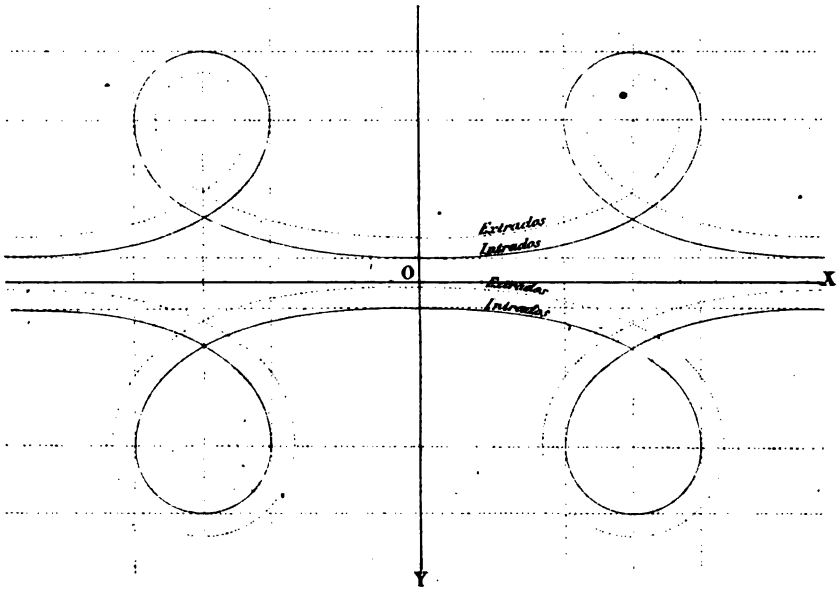
Cette construction du rayon de courbure de l'intrados fictif donnera le moyen de construire en même temps l'extrados, puisque ces courbes sont parallèles et distantes de la quantité $e$. Quant à l'intrados réel, il sera facilement donné par la construction des épaisseurs dont l'expression ($\gamma$) est

$$\varepsilon = e + \frac{i}{6}\frac{e}{\mu_4}y'' = e + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y''.$$

En effet, prenons sur l'axe des $x$ la distance $\overline{OE'} = e$, et menons par le point E′ une droite E′E′₁ parallèle à OY; menons ensuite par le même point E′ une autre droite E′E″ faisant avec la première un angle dont la tangente soit $\frac{ie}{6\mu_4}$ ou $\frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}$; l'abscisse PJ, du point J de la droite E′E″ ayant $y''$ pour ordonnée, sera la valeur de l'épaisseur $\varepsilon$ correspondante au plan de joint qui se projette en IN. Si donc on fait $\overline{IE} = e$, et que l'on porte ensuite de E en $i$ la distance $\overline{PJ} = \varepsilon$, le point $i$ ainsi déterminé appartiendra à l'intrados réel.

Il ne sera peut-être pas sans intérêt d'indiquer par une figure la disposition qu'affectent l'extrados et l'intrados fictif construits par le procédé qui vient d'être indiqué, et dans l'hypothèse $i = 1$.

La figure ci-jointe rend sensibles les particularités de la disposition dont il s'agit:




31. Voici maintenant l'usage que l'on pourra faire du tracé de l'intrados au moyen du rayon de courbure, pour la détermination des constantes (nos 22 et suivants), lorsqu'on voudra obtenir leurs valeurs approchées, sans avoir recours aux formules ($s''$), ou qu'on pourra s'en tenir à l'exactitude dont les procédés graphiques sont susceptibles. On déduira des considérations relatives aux limites de $e$ exposées nos 25 et 27, une première valeur approchée de cette inconnue. L'équation ($v''$), n° 24, donnera $\mu_0$ en fonction de l'arbitraire $\mu_1$ dans le cas des arches *incomplètes*, et $q$ se déduira de la relation $q^2 = 2\frac{e\mu_0}{i}$ déjà plusieurs fois mentionnée. Dans le cas des arches *en anse de panier*, la quantité $q$ devra être tirée de l'équation ($d'''$), n° 26. Au moyen de $e$ et $q$, il sera possible de construire l'intrados réel, et si l'on a préalablement tracé une droite parallèle à l'axe des $x$, à la distance $f$ au-dessous du

sommet de cet intrados, on constatera si cette droite rencontre la courbe à une distance de l'axe des $y$ égale à la demi-ouverture $g$ ou différente de celle-ci. Dans le premier cas, la valeur de $e$ d'où l'on sera parti sera la valeur cherchée; dans le second, il faudra recommencer le tracé en adoptant une valeur de $e$ différente de la première, et appliquer pour la correction de cette valeur l'une des méthodes dont il a été question à la fin du n° 24. Il est clair que le dernier tracé correspondant à la valeur de $e$ qui donne la demi-ouverture ou abscisse $g$, pour une flèche $f$ ou une ordonnée égale à $h + \varepsilon_0 + f$, présente la solution graphique du problème qui consiste à déterminer la forme entière de l'intrados et de l'extrados, puis les inclinaisons des plans de joint et les rayons de courbure. Dans le tracé définitif comme dans les tracés préliminaires, la construction des courbes se trouve ramenée à celle d'arcs de cercle de plus ou moins d'étendue, ainsi que nous l'avons annoncé dans le n° 1.

On pourra vérifier l'exactitude des tracés successifs ou du tracé définitif dans le cas des arches *incomplètes*, en calculant l'angle extrême $\alpha_1$ par la formule $(m''')$, où $y''_1$ doit avoir la valeur donnée par l'équation $(w'')$, et comparant cet angle à celui donné par le tracé; ces angles doivent coïncider, quelque fausse que soit l'hypothèse sur la valeur de $e$. Dans le cas des arches *en anse de panier*, si l'on mène une droite parallèle à l'axe des $x$ à une distance égale à $f$ au-dessous du sommet de l'intrados réel, il faudra que la normale au même intrados menée par le point d'intersection de la droite et de l'intrados coïncide avec cette même droite.

### COMPARAISON DES ARCHES ÉTABLIES SUIVANT LES PRINCIPES PRÉCÉDENTS, AVEC CELLES DONT L'INTRADOS PRÉSENTE LES FORMES AUJOURD'HUI EN USAGE.

32. Ayant effectué divers tracés d'arches *incomplètes*, conformément à la théorie que nous venons d'exposer, nous avons comparé ces tracés à ceux fournis par des intrados ayant en réalité la forme d'arcs de cercle, et assujettis aux mêmes conditions rela-

tives à la flèche et à l'ouverture que les précédents. Les voûtes *en arc de cercle* présentent, ainsi que cela doit être, moins de convexité vers les reins que les intrados déduits de notre théorie, et il semble, au premier abord, qu'il ne doive y avoir aucun inconvénient à s'en tenir à l'emploi de l'arc de cercle, à cause de la facilité de sa construction. On tomberait néanmoins dans une grave erreur en admettant cette conséquence. En effet, si, comme il est vrai, l'arc de cercle et la courbe théorique, qui coïncident au sommet et aux naissances, laissent entre eux un assez faible intervalle vers les reins, on admettra aisément qu'en remplissant cet intervalle, c'est-à-dire en passant de l'intrados indiqué par la théorie à l'arc de cercle, on n'ajoutera pas sensiblement à la charge totale de l'arche, et que dès lors la situation de la résultante des pressions restera sensiblement la même que dans le premier cas. Cette résultante passera vers le milieu des joints qui répondent à l'appareil théorique. Or supposons qu'en substituant l'appareil *en arc de cercle* à ce dernier, on conserve néanmoins les mêmes épaisseurs, ou encore, des épaisseurs constantes égales à celles qui ont lieu aux naissances, il arrivera que vers le tiers de la distance de celles-ci au sommet, à l'endroit du plus grand écart que présentent les deux courbes, les points qui correspondaient au milieu des anciennes épaisseurs se trouveront plus voisins du nouvel extrados, au point de n'en être éloignés que du $\frac{1}{3}$ ou du $\frac{1}{4}$ de l'épaisseur totale : la résultante des pressions s'approchera donc d'autant de ce nouvel extrados, et la distribution des pressions dans chaque joint se trouvera considérablement modifiée. On peut facilement reconnaître que l'addition de matière provenant du passage de la courbe théorique à l'arc de cercle, doit avoir pour effet une augmentation de la charge générale de la voûte, si la différence de convexité est notable, et qu'il en doit résulter une plus grande convexité dans la courbe *de la résultante des pressions;* celle-ci doit donc en réalité se rapprocher plus du nouvel extrados que s'il n'y avait aucune augmentation de charge. Admettons seulement qu'elle

s'en rapproche en définitive d'une quantité égale au tiers (*) de l'épaisseur du voussoir, la pression totale dans le joint n'ayant pu qu'augmenter, il en résultera que la pression par unité de surface deviendra au moins double de celle primitive qui était uniforme : or, si la pression primitive était déjà égale à la limite des pressions qu'on peut faire supporter sans inconvénient aux voussoirs, il arrivera que ceux-ci ne seront plus capables de résister à l'action de forces dont les intensités ont été doublées; de là naîtront des phénomènes plus ou moins prononcés de rupture par écrasement, et qui pourront compromettre gravement la stabilité de la construction. Inversement, on conclura de ces considérations, que si des arches *en arc de cercle* présentent toute la stabilité désirable, on pourrait leur substituer des arches établies suivant nos principes, et dans lesquelles les pressions maximum par unité de surface se trouvant réduites de moitié, par exemple, il serait facile de réduire en même temps les épaisseurs, et, par suite, les frais de construction, d'une quantité notable.

Enfin nous ajouterons que les mêmes considérations s'appliquent aux arches *en anse de panier* construites d'après des procédés qui donnent à l'intrados une forme plus ou moins voisine de celle des ellipses. Toutes ces courbes présentent, comme l'arc de cercle, moins de convexité vers les reins que celles que nous proposons. La deuxième partie de ce mémoire sera accompagnée d'épures qui présenteront la comparaison des profils circulaires ou elliptiques avec ceux dont nous avons exposé la théorie.

---

(*) En se basant sur le principe assez généralement admis de la proportionnalité des profondeurs d'impression aux intensités des pressions, on démontre ce résultat bien connu : que si deux corps prismatiques sont en contact suivant une face plane, et qu'on vienne à les soumettre à des pressions dont la résultante perpendiculaire à cette face, et située dans un plan qui la partage symétriquement, passe à une distance d'une arête, égale au tiers de la distance de cette arête à celle opposée, la pression par unité de surface, vers la première, s'élèvera au double de la pression moyenne, tandis qu'elle décroîtra jusqu'à devenir nulle vers l'arête opposée.

## DEUXIÈME PARTIE.

33. La deuxième partie de notre travail diffère, à quelques égards, du mémoire qui a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 14 décembre 1846, et sur lequel un rapport a été fait dans la séance du 26 octobre 1852.

Ce mémoire, dans lequel nous avions restreint nos formules au cas ordinaire où les matériaux qui forment le massif peuvent être considérés comme présentant sensiblement la même densité que les voussoirs, renfermait divers exemples de l'application de ces formules par voie de tâtonnements, au cas des arches incomplètes dites *en arc de cercle,* et des Tables à double entrée pour le cas des arches complètes ou *en anse de panier,* tables qui dispensaient d'effectuer les calculs par tâtonnements dont il vient d'être question pour le cas des autres arches. Nous avions profité de la facilité que nous offraient ces tables pour nous livrer à l'examen d'un assez grand nombre d'arches *en anse de panier* construites depuis longtemps. Le mémoire était suivi d'une application de la théorie générale, au cas où la charge qui s'élève au-dessus de la clef est très-grande, et nous avions choisi pour exemple celui que nous offre l'appareil connu, dans l'art des constructions, sous le nom de *poitrail.*

Dans leur rapport, MM. les Commissaires ont exprimé le désir que des tables fussent aussi construites pour abréger les calculs relatifs à l'établissement des arches dites *en arc de cercle.* Au moment où l'impression de notre mémoire a été décidée, nous avons songé sérieusement à nous rendre au vœu exprimé par la Commission, et à combler ainsi une lacune que nous regrettions nous-même de laisser dans notre travail.

Après un mûr examen, nous avons reconnu que le problème relatif aux arches incomplètes, qui nécessiterait la construction de tables à triple entrée, si l'on tenait à conserver les données et

inconnues que nous avions introduites dans la première partie de notre mémoire et dans le mémoire présenté en dernier lieu, n'exige que le calcul de tables à double entrée, si l'on exclut les termes du deuxième ordre ou dépendants du carré des épaisseurs, et que l'on substitue aux données et aux inconnues d'autres quantités. (Par exemple, à l'égard des données, il convient de substituer la quantité $h'' = h + e$ à la donnée $h$.) De cette manière, on n'aurait, il est vrai, que des valeurs approchées des inconnues, et qui conviendraient dans les cas les plus ordinaires; mais on aperçoit la possibilité de construire une nouvelle table à double entrée, d'une petite étendue, qui fournisse la correction de la valeur de l'inconnue principale. Le même ordre d'idées s'applique au cas des arches *en anse de panier,* et la construction d'une table à simple entrée est alors suffisante. Théoriquement, la solution déduite de cette table exige une correction; mais on peut s'assurer que, dans les circonstances les plus défavorables, la correction qui porterait sur la différence de niveau du sommet de l'intrados ou des naissances avec la chaussée, dépasserait à peine un millimètre, et que, dans les limites ordinaires de la pratique, la correction qui resterait presque toujours au-dessous de cette quantité, serait toujours négligeable : en sorte que la table relative aux arches *en anse de panier* peut être considérée comme donnant des solutions exactes au point de vue pratique. Cette table, d'un usage très-simple, remplace la table à double entrée que nous avions construite tout d'abord. Quant à la transformation que nous faisons subir aux données, elle est telle que l'une ou l'autre arbitrairement, des deux quantités $h$ et $\mu_1$, peut toujours être donnée *a priori.*

Nous exposerons dans cette deuxième partie les principes qui nous ont guidé dans la construction des tables pour les deux espèces d'arches dont nous traitons, et nous insérerons ces tables à la fin du mémoire. Comme elles dispensent d'effectuer, par voie de tâtonnements, les calculs ou tracés qui seraient indispensables sans leur secours, nous ne donnerons point d'exemple de ce genre.

Il ne serait nécessaire de recourir à ces procédés, que si l'on voulait avoir égard à la différence de densité du massif et des voussoirs. Or nous pensons que les ingénieurs qui tiendront assez à la précision pour avoir égard à cette différence, ne reculeront pas devant l'emploi des méthodes de calcul ou des méthodes graphiques qui ont été indiquées dans la première partie. Faisons remarquer, à ce sujet, qu'en supposant seulement le produit $(1 - i)\, h''$ du même ordre de petitesse que les épaisseurs, ou du premier ordre, ce qui est très-admissible dans les arches de pont, il serait possible de joindre à nos tables de nouvelles tables destinées à corriger la solution obtenue en faisant $i = 1$. Le temps nous manque absolument pour entreprendre ces nouvelles recherches.

L'étendue déjà considérable de notre travail, et la crainte d'abuser de la facilité que l'Académie a bien voulu nous offrir pour l'impression, nous déterminent à ne point publier ici le chapitre sur l'établissement des appareils dits *poitrails*, lesquels, bien qu'ils présentent une grande analogie avec les arches de pont, ne doivent point cependant être considérés comme étant des cas particuliers d'arches de pont proprement dites.

### SIMPLIFICATION DES FORMULES GÉNÉRALES POUR LES CAS ORDINAIRES QUE PRÉSENTENT LES ARCHES DE PONT.

34. Les deux éléments de réduction auxquels nous aurons recours sont le rapport désigné par $i$, de la densité du massif à celle des voussoirs, et la hauteur $h$ de la charge qui s'élève au-dessus du plan horizontal tangent à l'extrados.

Le plus souvent, et c'est d'ailleurs l'habitude du plus grand nombre des ingénieurs, on peut négliger la différence de densité du massif et des voussoirs. C'est ce que nous ferons dans tout ce qui va suivre, en posant

$$i = 1.$$

Cette relation permet d'effectuer immédiatement une grande simplification dans les formules ($s''$), en y réduisant à zéro les coefficients D et G et les termes des autres coefficients qui ont $(1 - i)$ pour facteur.

Quant à la hauteur de charge $h$, cette quantité est très-grande par rapport à l'épaisseur dans les tunnels et dans les *poitrails* dont il a été question au numéro précédent. La grandeur de $h$ permettrait aussi des simplifications, et rendrait praticable l'emploi des séries à la place des fonctions elliptiques; mais nous ne nous occuperons point de ces constructions, par la raison énoncée en terminant le même numéro. Dans les ponts, au contraire, la hauteur $h$ est très-faible, et presque toujours plus petite que l'épaisseur de la voûte. Nous avons déjà dit au n° 20 que la petitesse de $h$ permet de réduire l'échelle des modules des fonctions elliptiques au premier de la série, et qu'il suffit de calculer une seule amplitude en outre de celle qui sert de point de départ à la série des amplitudes. Nous avons fait de diverses manières le calcul de l'erreur qui en résulte, et nous nous sommes assuré qu'elle est à peu près insensible dans le cas des ponts. Néanmoins, dans le calcul des tables, nous nous sommes astreint à ajouter la petite correction nécessaire pour obtenir le degré d'exactitude que l'on atteindrait en tenant compte, dans le calcul des fonctions elliptiques, d'un module et d'une amplitude de plus.

Nous commencerons par opérer sur les fonctions elliptiques des transformations indiquées par la petitesse de $h$ ou de $h''$. L'expression de $\tang^2 \varphi$, équations ($s''$), montre que si l'on y prend $y''$ égal à l'ordonnée du point inférieur de l'intrados, l'angle $\varphi$ sera plus voisin de 90° que de zéro : comme nous ne ferons usage des équations ($s''$) que pour établir une relation entre les coordonnées du point inférieur de l'intrados, il convient ici de substituer à l'angle $\varphi$ son complément; posons donc

$$\xi = 90^\circ - \varphi.$$

Nous avons dit en outre que le module $c$ est très-voisin de l'unité

dans la même hypothèse relative à $h''$ : pour cette raison, nous lui substituerons son complément $b$ donné par la formule

$$b^2 = 1 - c^2 :$$

si l'on fait, de plus,

$$\sin\psi = b,$$

d'où

$$\cos\psi = c,$$

on aura l'échelle suivante des modules :

$$\sin\psi_1 = \tang^2 \tfrac{1}{2}\psi,$$

$$\sin\psi_2 = \tang^2 \tfrac{1}{2}\psi_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\psi_n = \tang^2 \tfrac{1}{2}\psi_{n-1};$$

celle des amplitudes deviendra

$$\cos(2\xi_1 - \xi) = \cos\xi \cos\psi,$$

$$\cos(2\xi_2 - \xi_1) = \cos\xi_1 \cos\psi_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos(2\xi_n - \xi_{n-1}) = \cos\xi_{n-1} \cos\psi_{n-1}.$$

Dans le cas où les angles $\xi$ seraient très-petits, on ne pourrait plus se servir de ces formules ; mais on en déduit les suivantes qui ne présentent pas les mêmes difficultés :

$$\sin^2(2\xi_1 - \xi) = \sin^2\xi + \cos^2\xi \sin^2\psi,$$

$$\sin^2(2\xi_2 - \xi_1) = \sin^2\xi_1 + \cos^2\xi_1 \sin^2\psi_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin^2(2\xi_n - \xi_{n-1}) = \sin^2\xi_{n-1} + \cos^2\xi_{n-1} \sin^2\psi_{n-1}.$$

Ces dernières formules ne sont pas logarithmiques : il en existe d'autres qui ont l'avantage de l'être, mais elles exigent que les modules se succèdent dans l'ordre inverse de celui que nous avons adopté; nous les aurions rapportées, s'il nous avait été nécessaire d'effectuer les calculs au delà du premier module. Les précédentes, qui nous serviront au calcul de l'erreur que l'on commet en s'arrêtant à ce module, montrent actuellement la rapidité avec laquelle l'angle $\xi_n$ se rapproche de sa valeur limite, lorsque $\psi$ est très-petit ou que $c$ diffère peu de l'unité.

Enfin, les deux systèmes de formules propres au calcul des fonctions elliptiques elles-mêmes deviennent :

$$F(c_n, \varphi_n) = \log \cot \frac{1}{2} \xi_n,$$

$$F(c_{n-1}, \varphi_{n-1}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \psi_{n-1}} F(c_n, \varphi_n),$$

. . . . . .

$$F(c_1, \varphi_1) = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \psi_1} F(c_2, \varphi_2),$$

$$F(c\ , \varphi\ ) = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \psi} F(c_1, \varphi_1);$$

$$E(c_n, \varphi_n) = \cos \xi_n,$$

$$E(c_{n-1}, \varphi_{n-1}) = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \psi_{n-1} E(c_n, \varphi_n) + 2 \sin^2 \frac{1}{2} \psi_{n-1} F(c_n, \varphi_n) - \cos(2 \xi_n - \xi_{n-1}),$$

. . . . . .

$$E(c_1, \varphi_1) = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \psi_1 E(c_2, \varphi_2) + 2 \sin^2 \frac{1}{2} \psi_1 F(c_2, \varphi_2) - \cos(2 \xi_2 - \xi_1),$$

$$E(c\ , \varphi\ ) = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \psi\ E(c_1, \varphi_1) + 2 \sin^2 \frac{1}{2} \psi\ F(c_1, \varphi_1) - \cos(2 \xi_1 - \xi\ ).$$

35. Nous limiterons d'abord l'emploi des formules précédentes en faisant $n = 1$. De cette manière, il sera inutile de calculer $\psi_1$, et il suffira d'appliquer la première des formules qui donnent la série des $\xi$. Le calcul des fonctions $F$ et $E$ se réduira ainsi à celui des formules extrêmes de chacune des deux séries.

Ceci posé, les premières équations $(s'')$ donnent, en vertu de $i = 1$:

$$h'' = h + e,$$

$$q^2 = 2e\mu_0,$$

$$A = q^2 + (h'' - e)^2,$$

$$C = 2\left[q^2 - 2h''e + \frac{4}{3}e^2\right],$$

$$B = C + h''^2,$$

$$\tang^2\varphi = \frac{B}{k''^2}\,\frac{y''^2 - k''^2}{B - y''^2}.$$

De cette dernière équation on tire les trois relations suivantes:

$$\sin^2\xi = \frac{k''^2}{y''^2}\,\frac{B - y''^2}{B - k''^2}, \quad \cos^2\xi = \frac{B}{y''^2}\,\frac{y''^2 - k''^2}{B - k''^2}, \quad \tang^2\xi = \frac{k''^2}{B}\,\frac{B - y''^2}{y''^2 - k''^2},$$

dont la première sera particulièrement utile.

Nous avons posé plus haut: $\sin\psi = b$, et $b^2 = 1 - c^2$; il s'ensuit

$$\sin\psi = \sqrt{1 - c^2};$$

or, $1 - c^2 = \frac{B - C}{B}$ en vertu des équations $(s'')$, il vient donc

$$\sin\psi = \frac{k''}{\sqrt{B}}.$$

La valeur de $\Delta^2$ est

$$\Delta^2 = 1 - c^2\sin^2\varphi = \cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi,$$

ou

$$\Delta^2 = \sin^2\xi + \cos^2\xi \sin^2\psi;$$

de cette expression comparée avec la première des relations non logarithmiques entre les amplitudes, rapportées plus haut, on tire

$$\Delta^2 = \sin^2(2\xi_1 - \xi):$$

mettant dans la valeur précédente de $\Delta^2$, pour $\sin^2\xi$, $\cos^2\xi$ et $\sin\psi$, leurs valeurs données ci-dessus, il vient

$$\Delta^2 = \frac{k''^2(B - y''^2) + k''^2(y''^2 - k''^2)}{y''^2(B - k''^2)} = \frac{k''^2}{y''^2},$$

et l'on a simplement

$$\Delta = \sin(2\xi_1 - \xi) = \frac{k''}{y''}.$$

Le troisième terme de la valeur de $x''$ devient de même

$$\frac{C}{\sqrt{B}} \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \frac{B - k''^2}{\sqrt{B}} \frac{y''}{k''} \sin\xi\cos\xi = \sqrt{B - y''^2}\sqrt{1 - \frac{k''^2}{y''^2}}$$

(en supposant les angles $\varphi$ et $\xi$ compris entre 0° et 90°), ou, en vertu de la relation précédente,

$$\frac{C}{\sqrt{B}} \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \sqrt{B - y''^2}\cos(2\xi_1 - \xi).$$

Les fonctions elliptiques limitées dans leur développement, comme il a été convenu, se réduisent à

$$F(c, \varphi) = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\psi} \log\cot\frac{1}{2}\xi_1,$$

$$E(c, \varphi) = 2\cos^2\frac{1}{2}\psi\cos\xi_1 + 2\sin^2\frac{1}{2}\psi\log\cot\frac{1}{2}\xi_1 - \cos(2\xi_1 - \xi)$$

A l'aide des valeurs que nous venons d'obtenir, et à cause de $D = 0$, $G = 0$, l'expression de $\pm x''$ se réduit d'abord à

$$\pm x'' = \frac{A}{\sqrt{B}} . F(c, \varphi) - \sqrt{B} . E(c, \varphi) + \sqrt{B - y''^2} \cos(2\xi_1 - \xi)$$

(on écrit ici le double signe devant $x''$, parce que l'on suppose les angles $\varphi$ et $\xi$ compris entre 0° et 90°, ce qui suffit dans le problème des arches de pont) : en substituant dans cette dernière équation les valeurs des fonctions $F$ et $E$, il vient

$$\pm x'' = \frac{A - 2B \sin^2 \frac{1}{2}\psi \cos^2 \frac{1}{2}\psi}{\sqrt{B} \cos^2 \frac{1}{2}\psi} \log \cot \frac{1}{2}\xi_1 - 2\sqrt{B} \cos^2 \frac{1}{2}\psi \cos \xi_1$$
$$+ (\sqrt{B} + \sqrt{B - y''^2}) \cos(2\xi_1 - \xi).$$

On peut encore chasser l'angle $\psi$ : en effet, l'on a

$$2 \cos^2 \frac{1}{2}\psi = 1 + \cos\psi = 1 + \sqrt{1 - \frac{h''^2}{B}} = 1 + \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{B}},$$

ce qui donne

$$2\sqrt{B} \cos^2 \frac{1}{2}\psi = \sqrt{B} + \sqrt{C}.$$

D'un autre côté, le numérateur de la fraction qui multiplie $\log \cot \frac{1}{2}\xi_1$ peut s'écrire

$$A - \frac{1}{2} B \sin^2 \psi = A - \frac{1}{2} h''^2;$$

or, on a, par les équations (3),

$$A = \frac{1}{2} C + h''^2 - \frac{1}{3} e^2,$$

et, par suite,

$$A = \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} h''^2 - \frac{1}{3} e^2,$$

d'où

$$A - \frac{1}{2} h''^2 = \frac{1}{2}\left(B - \frac{2}{3} e^2\right):$$

soit, pour abréger,

$$A' = \frac{B - \frac{2}{3} e^2}{\sqrt{B} + \sqrt{C}},$$

il viendra finalement

$$\pm x'' = A' \log \cot \frac{1}{2} \xi_1 - (\sqrt{B} + \sqrt{C}) \cos \xi_1 + (\sqrt{B} + \sqrt{B - y''^2}) \cos (2 \xi_1 - \xi).$$

35 *bis*. Sans entrer dans tous les développements qui seraient nécessaires pour effectuer les calculs, nous allons dire brièvement comment nous avons obtenu la correction qu'il faut apporter à la valeur de $x''$ pour parvenir au même degré d'exactitude que si nous avions poussé le calcul des fonctions elliptiques jusqu'à l'emploi de l'amplitude $\xi_2$.

Nous avons posé d'abord

$$\xi_2 = \xi_1 + \sigma,$$

$\sigma$ désignant une quantité très-petite que nous avons obtenue en appliquant le théorème de Taylor à la relation

$$\sin^2 (2 \xi_2 - \xi_1) = \sin^2 \xi_1 + \cos^2 \xi_1 \sin^2 \psi_1:$$

la valeur de $\sigma$ est, aux termes près des ordres supérieurs,

$$\sigma = \frac{1}{4} \cot \xi_1 \tang^4 \frac{1}{2} \psi.$$

Quant à la valeur de $\tang \frac{1}{2} \psi$ : de la relation

$$2 \sqrt{B} \cos^2 \frac{1}{2} \psi = \sqrt{B} + \sqrt{C},$$

on tire

$$2\sqrt{B}\sin^2\tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{B} - \sqrt{C},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi = \frac{h''}{\sqrt{B}+\sqrt{C}},$$

quantité dont la quatrième puissance est très-petite.

En faisant toujours usage du théorème de Taylor, on trouve aisément

$$\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_2 = \log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \tfrac{1}{4}\frac{\cot\xi_1}{\sin\xi_1}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi,$$

$$\cos\xi_2 = \cos\xi_1 - \tfrac{1}{4}\cos\xi_1\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi.$$

A l'aide de ces valeurs, on obtient pour expressions approchées des corrections à appliquer aux fonctions $F$ et $E$,

$$\delta F = \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi\left(\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \frac{\cot\xi_1}{\sin\xi_1}\right),$$

$$\delta E = \operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi\left(\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \cos\xi_1\right);$$

et l'on en déduit, pour la correction de la valeur absolue de $x''$,

$$\delta x'' = -\sqrt{B}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi\left\{\tfrac{7}{8}\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 + \left(\frac{1}{8\sin^2\xi_1} - 1\right)\cos\xi_1\right\},$$

en négligeant les quantités de l'ordre de $\operatorname{tang}^6\frac{1}{2}\psi$. Dans cette expression, la parenthèse croît à mesure que $\xi_1$ diminue ou que $h''$ tend vers zéro; mais le facteur $\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\psi$ décroît plus rapidement que la valeur de la parenthèse n'augmente, et $\delta x''$ s'annule avec $h''$.

Une expression encore susceptible de simplification est celle de la tangente de l'angle $\alpha$ que fait la normale à l'extrados avec la verticale : l'équation ($m'''$) dans laquelle les quantités $\alpha$ et $y''$ ont été

notées de l'indice 1, devient, en rétablissant la généralité de cette formule,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sqrt{(y''^2 - k''^2)(B - y''^2)}}{A - y''^2};$$

on en tire aisément, au moyen des relations précédemment établies entre les quantités A, B et C, et négligeant les termes en $e^4$,

$$\sin\alpha = \frac{2}{C}\,\frac{\sqrt{(y''^2 - k''^2)(B - y''^2)}}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\left[1 - \frac{2}{C}(y''^2 - k''^2)\right]\frac{e^2}{C}}},$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{C}\,\frac{A - y''^2}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\left[1 - \frac{2}{C}(y''^2 - k''^2)\right]\frac{e^2}{C}}}.$$

La dernière de ces équations va nous fournir un moyen plus rapide de calculer l'angle $\alpha$. En y substituant la valeur de A en fonction de C obtenue précédemment, puis multipliant haut et bas par $\frac{2}{C}$, on a

$$\cos\alpha = \frac{1 - 2\frac{y''^2 - k''^2}{C} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\left[1 - 2\frac{y''^2 - k''^2}{C}\right]\frac{e^2}{C}}};$$

soit

$$\cos\alpha' = 1 - 2\,\frac{y''^2 - k''^2}{C},$$

d'où

$$\sin\frac{1}{2}\alpha' = \pm\sqrt{\frac{y''^2 - k''^2}{C}},$$

équation qui sera très-propre à déterminer l'auxiliaire $\alpha'$; la valeur de $\cos\alpha$ deviendra

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha' - \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\cos\alpha'\frac{e^2}{C}}};$$

or, si l'on néglige les termes du quatrième ordre, elle se réduira à

$$\cos\alpha = \cos\alpha' - \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}\sin^2\alpha':$$

on en déduit aisément

$$\sin(\alpha - \alpha') = \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}\sin\alpha'.$$

Cette équation, jointe à celle qui donne l'angle $\alpha'$ par le sinus de sa moitié, sera d'un emploi plus commode que les formules précédentes, pour calculer l'angle $\alpha$.

L'interprétation géométrique de cette relation entre les angles $\alpha$ et $\alpha'$ est facile. Déterminons, en effet, l'angle des intrados réel et fictif; son expression est $\frac{d.2\delta}{ds''} = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}\frac{dy''}{ds''}$, en vertu de l'équation $(x)$: or, en négligeant les termes du troisième ordre, cette expression coïncide avec la valeur de $\alpha - \alpha'$ donnée par l'équation précédente. Il en résulte que l'angle $\alpha'$ est l'angle que ferait avec l'axe des $x$ la tangente à une courbe dont les éléments seraient symétriques avec ceux de l'intrados réel par rapport à la tangente à l'intrados fictif.

Avant d'aller plus loin, il est indispensable de résumer les relations que nous venons d'obtenir; nous y joindrons une relation nouvelle en posant $C = 4Q^2$, $Q^2$ étant une quantité qui nous servira dans le calcul des coordonnées par voie de différence. Pour éviter le recours à la première partie du mémoire, nous reproduirons les notations.

### RÉSUMÉ DES FORMULES SIMPLIFIÉES POUR LE CAS OÙ LE MASSIF ET LA VOÛTE SONT DE MÊME DENSITÉ.

#### Notations.

36. L'axe des $y$ est vertical et passe par le sommet de l'arche; l'axe des $x$ est horizontal et situé dans un plan parallèle au plan des têtes, qui est élevé au-dessus du plan tangent à l'extrados d'une quantité $h$ représentant la hauteur d'une couche de matériaux

de même densité que le massif et dont le poids serait égal à celui des couches de densités diverses qui surchargent la voûte.

Nous désignons par :

$h$ la hauteur de la charge qui s'élève au-dessus de la clef réduite à la densité du massif, comme il vient d'être dit, en sorte que $h$ désigne l'ordonnée du sommet de l'extrados;

$e$ l'épaisseur fictive de la voûte ou la distance constante entre l'extrados et l'intrados fictif, mesurée suivant la normale commune à ces deux courbes;

$h''$ l'ordonnée du sommet de l'intrados fictif;

$x'$, $y'$ et $\rho'$ les coordonnées et le rayon de courbure de l'extrados;

$x''$, $y''$ et $\rho''$ les coordonnées du point de l'intrados fictif situé sur la normale à l'extrados menée par le point $(x', y')$; et le rayon de courbure de l'intrados fictif, au point $(x'', y'')$;

X, Y les coordonnées du point de l'intrados réel situé sur la même normale;

$\alpha$ l'angle de cette normale avec l'axe des $y$ ou du plan de joint passant par le point $(x', y')$ avec la verticale;

$\alpha'$ un angle auxiliaire très-peu différent de $\alpha$, et dont la signification géométrique a été donnée à la fin du numéro précédent.

$\varepsilon$ l'épaisseur réelle, ou la distance comprise entre le point $(x', y')$ de l'extrados et le point (X, Y) de l'intrados réel;

$\delta$ la distance comprise entre le milieu du joint réel et le milieu de l'épaisseur fictive, en sorte que $2\delta$ désigne la distance des points $(x'', y'')$ de l'intrados fictif et (X, Y) de l'intrados réel;

$\mu$ la hauteur d'une colonne prismatique de la matière des voussoirs, dont le poids produirait sur une base horizontale la pression qui a lieu dans le plan normal à l'extrados mené par le point $(x', y')$;

$\lambda$ la dimension de l'arche dans le sens perpendiculaire au plan des têtes ou parallèle aux génératrices;

$\varpi$ le poids de l'unité de volume de la matière des voussoirs et du massif;

T et $t$ la pression totale et la pression par unité de surface qui ont lieu dans le plan normal à l'extrados mené par le point $(x', y')$;

U la poussée horizontale qui résulte des actions exercées par le massif sur la face verticale de la culée qui passe par l'arête inférieure de l'extrados;

$u$ l'ordonnée du point d'application de cette résultante;

V le volume des matériaux de la demi-arche et du massif limité dans le sens horizontal par des plans verticaux menés par le sommet et le point inférieur de l'extrados parallèlement aux génératrices;

$f$ la flèche de l'arche, ou la montée;

$g$ la demi-ouverture.

Les indices o et 1 serviront à désigner les valeurs particulières que prennent les diverses variables au sommet de la voûte et aux naissances (à l'exception de l'indice 1 qui affecte les lettres $\psi$ et $\xi$ dans les expressions des modules et amplitudes des fonctions elliptiques).

Voici maintenant les relations dont nous aurons à faire usage pour calculer l'abscisse d'un point de l'intrados fictif en fonction de l'ordonnée, déterminer la situation de la normale et l'intensité des pressions:

$$h'' = h + e, \tag{1}$$

$$q^2 = 2e\mu_0, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= q^2 + (h'' - e)^2, \\ 4Q^2 = C &= 2\left[q^2 - 2h''e + \frac{4}{3}e^2\right], \\ B &= C + h''^2, \\ A' &= \frac{B - \frac{2}{3}e^2}{\sqrt{B} + \sqrt{C}}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sin(2\xi_1-\xi)=\frac{k''}{y''},\qquad \sin\xi=\frac{k''}{y''}\sqrt{\frac{B-y''^2}{C}},\\
&x''=A'\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1-(\sqrt{B}+\sqrt{C})\cos\xi_1+(\sqrt{B}+\sqrt{B-y''^2})\cos(2\xi_1-\xi)\\
&\quad-\sqrt{B}\left(\frac{k''}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}\right)^4\left\{\frac{7}{8}\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1+\left(\frac{1}{8\sin^2\xi_1}-1\right)\cos\xi_1\right\}.\ (^*)
\end{aligned}\right\}(4)$$

(Pour plus de clarté, on a supprimé les doubles signes, ici et dans les expressions suivantes; on pourrait toujours les rétablir au besoin, en se rappelant que les courbes intrados et extrados sont symétriques par rapport à l'axe des $y$ : tout se rapporte ainsi à la partie de l'arche située du côté des $x$ positifs.)

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha&=\frac{2}{C}\,\frac{\sqrt{(y''^2-h''^2)(B-y''^2)}}{\sqrt{1-\frac{4}{3}\left[1-\frac{2}{C}(y''^2-h''^2)\right]\frac{e^2}{C}}},\\
\cos\alpha&=\frac{2}{C}\,\frac{A-y''^2}{\sqrt{1-\frac{4}{3}\left[1-\frac{2}{C}(y''^2-h''^2)\right]\frac{e^2}{C}}},
\end{aligned}\right\}(5)$$

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\sqrt{(y''^2-h''^2)(B-y''^2)}}{A-y''^2};\qquad(6)$$

on peut aussi calculer l'angle $\alpha$ au moyen des deux formules

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha'=\sqrt{\frac{y''^2-h''^2}{C}},\qquad \sin(\alpha-\alpha')=\frac{2}{3}\frac{e^2}{C}\sin\alpha'.\qquad(6\ bis)$$

$$\mu=\mu_0+y''-h''+\frac{1}{3\mu_0}(y''^2-h''^2),\qquad(7)$$

(*) Il arrive souvent que le deuxième et le troisième terme du second membre sont peu différents : il faut alors calculer ces termes avec une figure de plus que le premier, à moins qu'on ne remplace ces deux termes par le suivant, que l'on obtient après quelques transformations,

$$-\frac{y''^2\cos^2(2\xi_1-\xi)}{\sqrt{C}+\sqrt{B-y''^2}}\left\{\cos(2\xi_1-\xi)+\left(1+\frac{\sqrt{B}+\sqrt{B-y''^2}}{2\sqrt{C}}\right)\frac{\sin^2(2\xi_1-\xi)}{\cos(2\xi_1-\xi)+\cos\xi_1}\right\}.$$

Quant au dernier, il est presque insensible pratiquement; malgré cela, nous en avons tenu compte dans le calcul des tables dont il sera question ci-après.

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'', \qquad \varepsilon = e + 2\delta, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} Y &= y'' + 2\delta\cos\alpha, \quad y' = y'' - e\cos\alpha, \\ X &= x'' - 2\delta\sin\alpha, \quad x' = x'' + e\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Les ordonnées des points extrêmes de l'intrados fictif sont

$$y''_0 = h'', \quad y''_1 = f + h'' + 2\delta_0 - 2\delta_1\cos\alpha_1; \tag{10}$$

celles des points extrêmes de l'intrados réel sont

$$Y_0 = h'' + 2\delta_0, \quad Y_1 = f + h'' + 2\delta_0; \tag{11}$$

et la valeur de la demi-ouverture est

$$g = X_1 = x''_1 - 2\delta_1\sin\alpha_1. \tag{12}$$

Les relations entre les pressions qui ont lieu dans les plans de joint extrêmes données par les équations ($t''$) et ($u''$) sont enfin

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_0 + f + \frac{f(f+2h'')}{3\mu_0}, \\ \mu_0 &= \mu_1 - f - \frac{f(f+2h'')}{3(\mu_1 - f)}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Nous n'avons point à dire ici comment on devra se servir de ces formules, et pratiquer, suivant le besoin, les éliminations. En traitant de la construction des tables destinées à éviter les calculs par tâtonnements, nous montrerons, dans les numéros suivants, comment nous avons fait usage de ces formules; mais nous devions les rassembler tout d'abord.

### DE LA CONSTRUCTION DE TABLES APPROPRIÉES À LA DÉTERMINATION DES INCONNUES, DANS LE CAS DES ARCHES INCOMPLÈTES, DITES *EN ARC DE CERCLE*.

37. De ce qui a été exposé au n° 24, il résulte que si l'on se donne, dans le cas des arches incomplètes, les quantités $f$, $g$,

$h$, $\mu_0$ ou $\mu_1$ et $i$, et que l'on attribue à l'épaisseur $e$ une valeur hypothétique, on pourra calculer la valeur de $g$ en fonction des cinq autres quantités, à l'aide des formules générales. Comme nous avons fait $i = 1$, la valeur de $g$ n'est plus fonction, au moyen des équations du numéro précédent, que de quatre variables indépendantes; mais l'homogénéité de nos formules permet de substituer aisément la recherche des rapports des variables à la recherche de leurs valeurs absolues (*), en sorte que le problème serait ramené à celui de la construction de tables à triple entrée, problème à peu près inabordable pratiquement. Or la difficulté qui se présente ici peut être levée en substituant à la donnée $h$, l'ordonnée $Y_0$ du sommet de l'intrados. Les problèmes qui se présentent dans la construction des chemins de fer comportent plutôt, comme données relatives aux arches de pont, les différences de niveau de leurs diverses parties, que l'épaisseur rigoureusement déterminée des couches de matériaux qui s'élèvent au-dessus du sommet de l'extrados.

Admettant donc la quantité $Y_0$ comme l'une des données du problème, nous remarquerons que, si l'on fait abstraction des termes du deuxième ordre ou qui ont en facteur le carré de l'épaisseur $e$, et que, de plus, on prenne pour inconnue la quantité $Q^2$ ou $\frac{1}{4}C$, l'épaisseur $e$ disparaîtra complétement des équations; en sorte que $g$ sera seulement fonction de $f$, $Y_0$ et de l'inconnue $Q^2$.

---

(*) Nous profiterons de la circonstance pour présenter une remarque qui eût peut-être été mieux placée ailleurs, et que le lecteur aura sans doute faite. Les relations que nous avons établies, ayant lieu entre des rapports de grandeurs linéaires, restent les mêmes dans les arches de profils semblables, où les longueurs homologues sont entre elles dans un même rapport : il s'ensuit que, dans les arches semblables, la quantité $\mu$, qui détermine les pressions par unité superficielle entre les voussoirs en des points semblablement placés, est proportionnelle aux dimensions linéaires homologues des arches que l'on compare. La pression totale par unité de longueur mesurée parallèlement aux génératrices de l'intrados, qui est représentée par $\mu e$, et détermine la poussée dans le joint inférieur quand $\mu$ prend la valeur particulière $\mu_1$, se trouve, par suite, proportionnelle au carré des dimensions homologues.

En effet, se donnant $Q^2$, $Y_0$ et $f$, les équations (11) et (10) donnent $h'' = Y_0$ et $y''_1 = f + h''$, aux termes près du deuxième ordre; les équations (3) donnent $C = 4Q^2$, $B = C + h''^2$; et, en faisant $y'' = y''_1$ dans les équations (4), celles-ci permettent d'obtenir la valeur de $x''_1$ qui, en vertu de (12), est égale à $g$, aux termes près du deuxième ordre. Introduisant les rapports de lignes au lieu de leurs valeurs absolues, il arrive que $\frac{g}{f}$, par exemple, n'est plus fonction que de $\frac{Y_0}{f}$ et de $\frac{Q^2}{f^2}$, et que la solution approchée du problème se trouve dépendre de la construction de tables à double entrée seulement.

En suivant la marche qui vient d'être indiquée, nous avons calculé effectivement des tables qui présentent la suite des valeurs de $\frac{g}{f}$ relatives à des valeurs fixes de $\frac{Y_0}{f}$ et à des valeurs variables du rapport $\frac{Q^2}{f^2}$; dix tables de ce genre ont été calculées pour des valeurs de $\frac{Y_0}{f}$ égales à 0,4; 0,5; 0,6;....; 1,2; 1,3. Or, la recherche de la valeur de $\frac{Q^2}{f^2}$ en fonction de $\frac{Y_0}{f}$ et de $\frac{g}{f}$ à l'aide de ces tables eût été pénible; il eût fallu même en augmenter très-notablement l'étendue pour les adapter à cet usage. Pour obvier à ces inconvénients, nous avons pris le parti de *retourner* chacune des dix tables, c'est-à-dire de calculer par voie d'interpolation, à l'aide des tables primitives, de nouvelles tables qui donnent directement la valeur de $\frac{Q^2}{f^2}$ en fonction de $\frac{Y_0}{f}$ et de $\frac{g}{f}$. Nous avons formé de cette manière la première des tables à double entrée que l'on trouvera à la fin de ce mémoire, sous le titre de *Table I*. L'étendue que nous lui avons donnée nous paraît répondre aux exigences de l'art des constructions. Nous ne présenterons point ici les détails relatifs au calcul des tables; disons seulement que nous avons fait usage des formules d'intercalation mentionnées, à propos du calcul des éphémérides des planètes, dans un mémoire sur la détermination de leurs orbites, inséré dans la *Connaissance des Temps* pour 1852.

La Table I donne la valeur approchée de $\frac{Q^2}{f^2}$, et, par suite, celle de $Q^2$, aux termes près du deuxième ordre. Cette première approximation permet de calculer la valeur des termes négligés, et d'en tenir compte ensuite. En effet, ces termes étant du deuxième ordre ou dépendants du carré de $e$, il suffit d'obtenir la valeur approximative de $e$ en fonction des données. A cet égard, se donnant $\mu_1$ par exemple, la deuxième équation (13) fait connaître $\mu_0$, et, si l'on élimine $q^2$ entre les équations (2) et (3), il vient

$$Q^2 = e\left(\mu_0 - h'' + \frac{2}{3}e\right),$$

d'où

$$e = \frac{Q^2}{\mu_0 - h'' + \frac{2}{3}e}, \tag{14}$$

équation dans laquelle on pourrait négliger $\frac{2}{3}e$ au dénominateur. La valeur trouvée de $e$, pour être admissible, doit, en vertu de l'équation (1), donner une valeur $h = h'' - e$ qui ne soit pas négative, et qui soit au moins égale à celle réclamée par l'expérience.

Si, au lieu de se donner $\mu_1$, on se donnait $h$, il viendrait par l'équation (1),

$$e = h'' - h; \tag{15}$$

la valeur de $\mu_0$ s'en déduirait :

$$\mu_0 = h'' + \frac{Q^2}{e} - \frac{2}{3}e, \tag{16}$$

et la première équation (13) donnerait celle de $\mu_1$; cette dernière devrait être compatible avec la résistance des matériaux employés, pour que la solution fût admissible.

Dans les deux cas, il est donc possible d'obtenir une valeur approchée de $e$; nous allons dire actuellement quel usage il convient d'en faire, pour corriger la valeur de $Q^2$ déduite des tables.

38. Enumérons les quantités négligées dans le calcul de la Table I.

1° Nous avons fait $h'' = Y_0$; il résulte de la première équation (11) que $h''$ doit recevoir la correction

$$\delta h'' = -2\delta_0.$$

2° Nous avons pris $y''_1 = f + h''$; la deuxième équation (10) montre que l'on doit appliquer à $y''_1$ la correction

$$\delta y''_1 = \delta h'' + 2\delta_0 - 2\delta_1 \cos\alpha_1,$$

ou simplement

$$\delta y''_1 = -2\delta_1 \cos\alpha_1,$$

en vertu de la relation précédente.

3° Le terme en $e^2$ de la valeur de A′ ayant été négligé, il s'ensuit que $x''_1$ doit subir la correction spéciale

$$(\delta x''_1) = -\frac{2}{3}\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}e^2.$$

4° Nous avons fait simplement $g = x''_1$; il résulte de l'équation (12) que $g$ doit recevoir la correction $\delta x''_1 - 2\delta_1 \sin\alpha_1$ : comme, d'autre part, la valeur de $g$ ne doit pas changer, on a cette équation de condition,

$$\delta x''_1 - 2\delta_1 \sin\alpha_1 = 0,$$

dans laquelle nous devons regarder $\delta x''_1$ comme étant la variation de $x''_1$ qui résulte des trois corrections que nous venons d'indiquer, et d'une correction inconnue $\delta(Q^2)$ ou $\delta C$ qu'il s'agit de déterminer : $x''_1$ étant donc considéré comme fonction de $h''$, $y''_1$ et C, nous aurons

$$(\delta x''_1) + \left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)\delta h'' + \frac{dx''_1}{dy''_1}\delta y''_1 + \frac{dx''_1}{dC}\delta C - 2\delta_1 \sin\alpha_1 = 0:$$

dans cette équation, $\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)$ désigne la dérivée partielle de $x''_1$ par rapport à $h''$, obtenue en faisant abstraction de la variation que $x''_1$ subit par suite de ce que $y''_1$ varie avec $h''$; le terme $\frac{dx''_1}{dy''_1}\,\delta y''_1$ comprend cette variation.

Substituant les valeurs obtenues plus haut de $(\delta x''_1)$, $\delta h''$ et $\delta y''_1$, et observant que l'on a $\frac{dx''_1}{dy''_1} = \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}$, $\delta C = 4\,\delta(Q^2)$; il viendra

$$-\frac{2}{3}\,\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}\,e^2 - 2\,\delta_0\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) - \frac{2\,\delta_1}{\sin\alpha_1} + 4\,\frac{dx''_1}{dC}\,\delta(Q^2) = 0.$$

Nous avons d'ailleurs, première équation (8),

$$2\,\delta_0 = \frac{1}{3}\,\frac{e^2}{q^2}\,h'', \quad 2\,\delta_1 = \frac{1}{3}\,\frac{e^2}{q^2}\,y''_1,$$

ou, en négligeant les quantités du troisième ordre, équation (3),

$$2\,\delta_0 = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{C}\,h'', \quad 2\,\delta_1 = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{C}\,y''_1.$$

En négligeant les quantités du deuxième ordre dans la première équation (5), ce qui ne donnera lieu qu'à des erreurs du quatrième dans le résultat, on aura encore

$$\frac{2}{C\sin\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{(y_1''^2 - h''^2)(B - y_1''^2)}} = \frac{1}{y''_1\cos(2\xi_1 - \xi)\sqrt{B - y_1''^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de condition, on en tirera

$$6\,\frac{dx''_1}{dC}\,\delta(Q^2) = \left\{\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \frac{h''}{C}\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) + \frac{1}{2\cos(2\xi_1 - \xi)\sqrt{B - y_1''^2}}\right\}e^2. \quad (17)$$

Pour faire usage de cette formule, il reste à déterminer les valeurs des deux dérivées $\frac{dx''_1}{dC}$ et $\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)$. On peut les obtenir de deux manières différentes.

En premier lieu, si l'on effectue les différentiations à l'aide des expressions du n° 36, et que l'on néglige la variation du dernier terme de $x''$, on parvient, après des transformations que nous nous dispenserons de reproduire, aux deux valeurs suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) &= h''\frac{2\sqrt{C}+\sqrt{B}}{(\sqrt{B}+\sqrt{C})^2}\log\cot\frac{1}{2}\xi_1 - \left[\frac{A'}{\sin\xi_1} - (\sqrt{B}+\sqrt{C})\sin\xi_1\right]\frac{\sqrt{B}+\sqrt{B-y_1''^2}+\dfrac{h''^2}{\sqrt{B-y_1''^2}}}{2y_1''\sqrt{B}\cos(2\xi_1-\xi)} \\
&\quad - \frac{\sqrt{B}+\sqrt{B-y_1''^2}}{y''_1}\operatorname{tang}(2\xi_1-\xi) + h''\left\{\frac{\cos(2\xi_1-\xi)}{\sqrt{B-y_1''^2}} - \frac{1}{\sqrt{B}}\left[\cos\xi_1 - \cos(2\xi_1-\xi)\right]\right\}, \\
6\frac{dx''_1}{dC} &= 3\frac{2\sqrt{C}-\sqrt{B}}{\sqrt{C}(\sqrt{B}+\sqrt{C})}\log\cot\frac{1}{2}\xi_1 - \left[\frac{A'}{\sin\xi_1} - (\sqrt{B}+\sqrt{C})\sin\xi_1\right]\frac{3}{2}\frac{h''\,y''_1\cos(2\xi_1-\xi)}{C\sqrt{B}\sqrt{B-y_1''^2}} \\
&\quad + 3\left\{\frac{\cos(2\xi_1-\xi)}{\sqrt{B-y_1''^2}} - \frac{\cos\xi_1}{\sqrt{C}} - \frac{1}{\sqrt{B}}\left[\cos\xi_1 - \cos(2\xi_1-\xi)\right]\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

En second lieu, $\frac{dx''_1}{dh''}$ désignant la dérivée partielle de $x''_1$ par rapport à $h''$, il vient, en vertu de ce qui a été dit plus haut,

$$\frac{dx''_1}{dh''} = \left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) + \frac{dx''_1}{dy''_1}\frac{dy''_1}{dh''},$$

ou simplement,

$$\frac{dx''_1}{dh''} = \left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) + \frac{dx''_1}{dy''_1},$$

à cause de $\frac{dy''_1}{dh''} = 1$, 2e équation (10). Or, on a, équation (6),

$$\frac{dx''_1}{dy''_1} = \cot\alpha_1 = \frac{A - y_1''^2}{\sqrt{y_1''^2 - h''^2}\sqrt{B - y_1''^2}},$$

valeur qui donne, en ayant égard aux relations établies au n° 35, et négligeant les termes du deuxième ordre,

$$\frac{dx''_1}{dy''_1} = \frac{\sqrt{B-y_1''^2}}{2y''_1\cos(2\xi_1-\xi)} - \frac{y''_1\cos(2\xi_1-\xi)}{2\sqrt{B-y_1''^2}}.$$

Maintenant, C ou $4Q^2$ étant, en vertu du *retournement* des tables, une fonction de $g$ et $Y_0$ ou de $x''_1$ et $h''$, il vient

$$dC = \frac{dC}{dx''_1}\,dx''_1 + \frac{dC}{dh''}\,dh'':$$

pour obtenir la dérivée partielle $\frac{dx''_1}{dh''}$, on doit supposer $Q^2$ ou C constant; alors cette équation, en y faisant $dC = 0$, donne

$$\frac{dx''_1}{dh''} = -\frac{\frac{dC}{dh''}}{\frac{dC}{dx''_1}} = -\frac{\frac{d(Q^2)}{dh''}}{\frac{d(Q^2)}{dx''_1}}.$$

La dérivée partielle $\frac{dx''_1}{dC}$ s'obtiendra pareillement en faisant $dh'' = 0$, et il viendra

$$\frac{dx''_1}{dC} = +\frac{1}{\frac{dC}{dx''_1}} = +\frac{1}{4\frac{d(Q^2)}{dx''_1}}.$$

A l'aide de ces diverses valeurs, on tirera de l'équation (17),

$$\frac{\delta(Q^2)}{e^2} = \frac{1}{3}\left\{\begin{array}{l} 2\,\dfrac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \dfrac{1}{\cos(2\xi_1-\xi)\sqrt{B-y_1''^2}} \\ -\dfrac{k''}{C}\left(\dfrac{\sqrt{B-y_1''^2}}{y''_1\cos(2\xi_1-\xi)} - \dfrac{y''_1\cos(2\xi_1-\xi)}{\sqrt{B-y_1''^2}}\right). \end{array}\right\}\frac{d(Q^2)}{dx''_1} - \frac{2}{3}\frac{k''}{C}\frac{d(Q^2)}{dk''}. \quad (19)$$

La quantité $f$ étant une constante, les deux dérivées que renferme cette expression peuvent s'écrire

$$f\,\frac{d\frac{Q^2}{f^2}}{d\frac{g}{f}} \quad \text{et} \quad f\,\frac{d\frac{Q^2}{f^2}}{d\frac{Y_0}{f}}.$$

Or, les nouvelles dérivées partielles que nous venons d'écrire se déduisent aisément des tables *retournées*, en prenant les différences de la fonction $\frac{Q^2}{f^2}$ successivement dans le sens vertical et dans le sens horizontal, et faisant usage de la formule connue

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\Delta x}\left\{\Delta u - \frac{1}{2}\Delta^2 u + \frac{1}{3}\Delta^3 u - \frac{1}{4}\Delta^4 u + \ldots\right\} \quad (20)$$

qui sert à obtenir la dérivée d'une fonction $u$ réduite en table, au moyen de ses différences $\Delta u$, $\Delta^2 u, \ldots$ et de la différence constante $\Delta x$ de la variable.

Il suffit ici de faire $\Delta x = 0,1$, ce qui conduit à prendre les différences de dix en dix termes dans le sens vertical, et de terme en terme dans le sens horizontal, pour obtenir des valeurs de $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$ et, par suite de $\delta Q^2$, qui corrigent assez exactement celles de $Q^2$. Les tables primitives ou des valeurs de $\frac{g}{f}$ auraient bien pu donner immédiatement les dérivées partielles $\frac{dx''_1}{dC}$; mais il n'aurait pas été possible d'en déduire aisément les dérivées $\frac{dx''_1}{dh''}$, tant à cause de la divergence de la série des différences $\Delta u$, $\Delta^2 u, \ldots$, qu'à cause des limites relatives à $\frac{Q^2}{f^2}$ qu'il eût fallu reculer en augmentant démesurément l'étendue de ces tables.

Nous avons calculé les tables qui donnent les valeurs de la fonction $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$; on les trouvera à la suite des tables de la valeur de $\frac{Q^2}{f^2}$, sous le titre de *Table II*. Ayant obtenu une valeur approchée de $e$, comme il a été dit au n° 37, on en déduira aisément, à l'aide de la Table II, la correction $\delta(Q^2)$ à appliquer à la valeur de $Q^2$ fournie par la Table I; et l'on aura, par les équations (11), (8) et (3),

$$h'' = Y_0 - \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}Y_0. \quad (21)$$

Les valeurs corrigées de $Q^2$ et $h''$ pourront être appliquées au

calcul d'une valeur plus exacte de $e$ au moyen de l'une ou de l'autre des formules (14) et (15), suivant les cas (*). Connaissant actuellement $Q^2$, $h''$, $e$ et $\mu_0$, l'emploi d'un petit nombre des formules du n° 36 fournira tout ce qu'il est nécessaire de connaître pour procéder au calcul des coordonnées, rayons de courbure, poussées, etc.

### CONSTRUCTION DES TABLES POUR LE CAS DES ARCHES COMPLÈTES, OU *EN ANSE DE PANIER*.

39. Nous avons vu, n° 26, comment la condition de la verticalité des tangentes extrêmes introduit une équation de condition entre les constantes, et réduit d'une unité les arbitraires du problème relatif aux arches complètes. Il est clair, si l'on se reporte aux considérations présentées n° 37, que la substitution de la constante $h''$ à la constante $h$ permettra de ramener la solution du problème à la construction d'une table à simple entrée. C'est ce qui se vérifiera du reste aisément par le fait même.

L'équation de condition que nous venons de rappeler est ($d'''$)

$$q^2 = f(f + 2h'') + 2h''e - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{h''(f+h'')}{f(f+2h'')}\right)e^2:$$

en éliminant $q^2$ entre celle-ci et la 2e équation (3), il vient immédiatement

$$\frac{1}{2}C = f(f + 2h'') + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{h''(f+h'')}{f(f+2h'')}\right)e^2,$$

(*) Nous indiquerons un moyen d'éviter le calcul de $\delta(Q^2)$, et d'obtenir néanmoins une solution exacte jusque dans les termes du deuxième ordre. Ce moyen consisterait à accepter la valeur approchée de $Q^2$ comme exacte, et à en déduire les valeurs de $e$ et $q^2$ : procédant ensuite au calcul des coordonnées ou au tracé de l'intrados, on s'arrêterait à l'ordonnée de l'intrados réel, qui répond, soit à la flèche, soit à la demi-ouverture données, et l'on prendrait à la place de l'une d'entre elles, celle fournie par le calcul ou le tracé. A la vérité, ce ne serait pas la solution du problème proposé, mais bien celle d'un problème du même genre, dans lequel les données différeraient très-peu des données du problème primitif. Or il est très-rare que les données soient tellement bien fixées, qu'on ne puisse leur faire subir, en pratique, la très-petite variation qu'entraînerait le mode de solution qui vient d'être indiqué.

équation à laquelle il faut joindre la valeur de $y''_1$ obtenue n° 26,

$$y''_1 = f + h'' + \frac{1}{3} h'' \frac{e^2}{q^2}.$$

On tire de celle-ci,

$$h'' = y''_1 - f - \frac{2}{3} \frac{h''}{C} e^2; \qquad (22)$$

cette valeur permet d'écrire C sous la forme

$$C = 2f(2y_1'' - f) + \frac{4}{3}\left(1 + \frac{2h''^2}{C}\right) e^2, \qquad (22\ bis)$$

ou bien

$$C = 2f(2y''_1 - f) + \frac{4}{3} \frac{y_1''^2}{f(2y''_1 - f)} e^2. \qquad (23)$$

D'un autre côté, les équations (10) et (11) donnent

$$Y_1 - y''_1 = 2\delta_1 \cos\alpha_1:$$

or observons que $2\delta_1$ et $\cos\alpha_1$ sont des quantités du deuxième ordre; leur produit étant du quatrième, on aura donc, à des quantités près de cet ordre,

$$y''_1 = Y_1. \qquad (24)$$

Maintenant, il est évident que, si l'on se donne l'ordonnée $Y_1$ des naissances, et l'une des quantités $f$ et $h''$, on pourra, en négligeant les termes du deuxième ordre, obtenir la valeur de $x''_1$ à l'aide des équations (24), (22) et (23), jointes à la relation $B = C + h''^2$ et aux équations (4). La demi-ouverture $g$ tirée de l'équation ($e''$) peut d'ailleurs s'écrire

$$g = x_1'' - \frac{2}{3} \frac{y''_1}{C} e^2; \qquad (25)$$

elle se réduit à $g = x''_1$, lorsqu'on néglige les termes du second ordre. Ainsi la quantité $g$ est fonction des deux variables $Y_1$ et $f$ ou $h''$; et le rapport $\frac{g}{Y_1}$ se trouve, par suite, être fonction d'une seule variable qui est $\frac{f}{Y_1}$ ou $\frac{h''}{Y_1}$, suivant que l'on se donne l'une ou l'autre des deux variables $f$ et $h''$.

La Table III insérée à la fin de ce mémoire contient, dans une première colonne, la suite des valeurs de $\frac{f}{Y_1}$, et, dans une seconde, les valeurs correspondantes de $\frac{g}{Y_1}$. Le rapport $\frac{g}{f}$ des nombres de la deuxième et de la première colonne est donné dans une troisième colonne. De cette manière notre table permet de trouver l'une des trois quantités $f$, $g$ et $Y_1$ au moyen des deux autres. Il est vrai que, théoriquement, les valeurs tirées de la Table III sont seulement approximatives, mais nous verrons bientôt qu'en pratique, on peut les considérer comme exactes.

Les valeurs de $f$ et $h''$ étant connues, du moins approximativement, il devient possible de calculer l'épaisseur $e$, en se donnant l'une ou l'autre des quantités $\mu_1$ et $h$.

En premier lieu, soit donné $\mu_1$ : la deuxième équation (13) fait connaître $\mu_0$ à l'aide de $\mu_1$. L'équation ($c'''$) jointe à la relation $h = h'' - e$ donne

$$y_1''^2 - h''^2 = q^2 - 2h''e + \frac{2}{3}e^2,$$

et, à cause de $q^2 = 2e\mu_0$, on obtient immédiatement

$$e = \frac{1}{2}\,\frac{y_1''^2 - h''^2}{\mu_0 - h'' + \frac{1}{3}e}. \qquad (26)$$

La valeur de $e$ s'en déduira en négligeant d'abord le terme $\frac{1}{3}e$ au dénominateur, et y substituant ensuite sa valeur obtenue par une première approximation.

On obtiendrait aussi la valeur de $e$ sans passer par $\mu_0$, au moyen de la formule

$$e = \frac{1}{2} \frac{f(2y'_1 - f)}{\mu_1 - y'_1\left(1 + \frac{y'_1}{6(\mu_1 - f)}\right)}; \tag{27}$$

mais, comme la valeur de $\mu_0$ sert au calcul de $q^2$, il sera préférable d'employer l'équation (26).

Quelle que soit, au surplus, celle des deux expressions (26) et (27) dont on ait fait usage, la solution trouvée devra, pour être admissible, satisfaire à de certaines conditions. Nous ne mentionnerons pas la condition $e > 0$, attendu que les valeurs de $\mu_1$ et $\mu_0$ seront toujours prises beaucoup plus grandes que $y''_1$ et $h''$; cette condition sera donc toujours remplie. Mais il faudra que l'on ait toujours $e < h''$, et, en outre, que la quantité $h = h'' - e$ qui en résultera, ne soit point inférieure à une limite fixée par les conditions particulières à l'établissement de la chaussée. Si ces conditions ne sont pas remplies, il faudra modifier les données. On diminuera l'épaisseur $e$ en choisissant des matériaux plus résistants.

En second lieu, si l'on se donne la hauteur $h$ de la surcharge, on aura immédiatement

$$e = h'' - h, \tag{28}$$

et il faudra s'assurer si la plus grande valeur de $\mu$ est compatible avec la nature des matériaux employés. A cet égard, on aura par l'équation (26),

$$\mu_0 = \frac{y_1'^2 - h''^2}{2e} + h'' - \frac{1}{3}e, \tag{29}$$

et la première équation (13) fera connaître ensuite $\mu_1$. Dans le cas où la valeur de $\mu_1$ se trouverait être trop forte, il faudrait augmenter $e$ et par suite $h''$.

La valeur de $e$ étant supposée connue au moins approximati-

vement, nous avons à rechercher quelles corrections doivent subir les inconnues du problème déduites de la Table III.

40. Les variables $f$, $g$, $Y_1$, entre lesquelles la Table III établit une dépendance mutuelle, sont au nombre de trois; et l'on peut se donner deux de ces variables arbitrairement, ce qui fournit trois combinaisons distinctes : mais, la demi-ouverture $g$ étant toujours au nombre des données, nous n'aurons à examiner que les deux combinaisons qui comprennent les deux systèmes de données $g$, $Y_1$ et $g$, $f$.

*Première combinaison.* — Étant donnés $g$ et $Y_1$, trouver la correction de la valeur de $f$ tirée de la Table III.

Les quantités négligées dans la construction de cette table sont faciles à rétablir, maintenant que la valeur de $e$ est connue approximativement. Soit, en effet, $\delta f$ la correction inconnue de $f$.

1° L'équation (22) a été appliquée en négligeant le terme du deuxième ordre et en faisant usage d'une valeur seulement approchée de $f$; on aura donc

$$\delta h'' = -\delta f - \frac{2}{3}\frac{h''}{C}e^2.$$

2° L'équation (22 *bis*) donne lieu à des corrections du même genre; leur somme est

$$\delta C = 4(y''_1 - f)\,\delta f + \frac{4}{3}\left(1 + 2\frac{h''^2}{C}\right)e^2.$$

3° La valeur de $x''_1$ a été calculée en négligeant le terme du deuxième ordre contenu dans A'; nous devons donc, en vertu de l'équation (4) et de la valeur de A', appliquer à $x''_1$ la correction spéciale

$$(\delta x''_1) = -\frac{2}{3}\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}e^2.$$

4° Le terme du deuxième ordre ayant été négligé dans l'équa-

tion (25), si nous désignons par $\delta x''_1$ la correction de $x''_1$ qui résulte de celles que nous venons d'indiquer, et que nous observions que $g$ doit conserver une valeur constante et donnée, nous aurons

$$\delta x''_1 - \frac{2}{3}\frac{y''_1}{C}e^2 = 0.$$

Or, $x''_1$ peut être considéré comme une fonction des deux variables $h''$ et C, données par les équations (22) et (23), puisque $f$ n'entre dans $x''_1$ que par ces variables; et l'équation précédente devient

$$(\delta x''_1) + \frac{dx''_1}{dh''}\delta h'' + \frac{dx''_1}{dC}\delta C - \frac{2}{3}\frac{y''_1}{C}e^2 = 0,$$

ou, en mettant pour $(\delta x''_1)$, $\delta h''$ et $\delta C$ leurs valeurs,

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \frac{h''}{C}\frac{dx''_1}{dh''} - 2\left[1+2\frac{h''^2}{C}\right]\frac{dx''_1}{dC} + \frac{y''_1}{C}\right)e^2$$
$$+\left[4(y''_1-f)\frac{dx''_1}{dC} - \frac{dx''_1}{dh''}\right]\delta f = 0;$$

on en tire

$$\frac{\delta f}{e^2} = \frac{2}{3}\,\frac{\dfrac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \dfrac{y''_1}{C} + \dfrac{h''}{C}\dfrac{dx''_1}{dh''} - 2\left(1+2\dfrac{h''^2}{C}\right)\dfrac{dx''_1}{dC}}{4(y''_1-f)\dfrac{dx''_1}{dC} - \dfrac{dx''_1}{dh''}}.$$

On peut encore utiliser ici les différences obtenues en calculant la Table III, pour éviter le calcul direct de la dérivée $\frac{dx''_1}{dh''}$. En effet, puisque $x''_1$ est fonction de $h''$ et C, on a

$$dx''_1 = \frac{dx''_1}{dh''}dh'' + \frac{dx''_1}{dC}dC;$$

et, comme $h''$ et C sont d'ailleurs fonctions de la seule variable $f$,

en vertu des équations (22) et (23) privées de leurs termes du deuxième ordre, on a, pour expression de la dérivée totale,

$$\frac{dx''_1}{df} = \frac{dx''_1}{dh''}\frac{dh''}{df} + \frac{dx''_1}{dC}\frac{dC}{df},$$

ou, en vertu des mêmes équations,

$$\frac{dx''_1}{df} = 4(y''_1 - f)\frac{dx''_1}{dC} - \frac{dx''_1}{dh''}.$$

La valeur de la dérivée partielle $\frac{dx''_1}{dh''}$ qu'on en tire étant portée dans celle de $\frac{\delta f}{e^2}$, il vient, à cause de $h'' = y''_1 - f$,

$$\frac{\delta f}{e^2} = \frac{2}{3}\,\frac{\dfrac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \dfrac{y''_1}{C} - \dfrac{h''}{C}\dfrac{dx''_1}{df} - 2\dfrac{dx''_1}{dC}}{\dfrac{dx''_1}{df}}. \qquad (30)$$

Il est clair que, $y''_1$ étant constant, on peut substituer à la dérivée $\frac{dx''_1}{df}$, la dérivée $\frac{d\frac{g}{Y_1}}{d\frac{f}{Y_1}}$ qui se déduit immédiatement des différences fournies par la Table III. Quant à la dérivée $\frac{dx''_1}{dC}$, nous en avons donné l'expression, (18). Cette expression et quelques-unes de celles qui servent à calculer $x''_1$ ou $g$ reçoivent des simplifications provenant de la condition particulière aux arches complètes (*); nous nous dispenserons de les présenter ici, attendu que

(*) Les quantités $h''$ et C (22) et (23), étant privées de leurs termes du deuxième ordre, fournissent aisément la relation

$$B - y_1''^2 = \frac{1}{2}C,$$

qui permet de simplifier le calcul de $x''_1$ et de ses dérivées partielles, dans le cas des arches complètes.

nos tables n'ont pas besoin d'être étendues au delà des limites que nous leur avons données, et que, sauf cette application, l'exposé des formules serait sans objet.

*Deuxième combinaison.* — Étant donnés $f$ et $g$, trouver la correction de la valeur de $Y_1$ tirée de la Table III. Soit $\delta Y_1$ la correction cherchée.

1° A cause de $y''_1 = Y_1$, on tire de l'équation (22)

$$\delta h'' = \delta Y_1 - \frac{2}{3}\frac{h''}{C} e^2.$$

2° L'équation (22 *bis*) donne

$$\delta C = 4 f \delta Y_1 + \frac{4}{3}\left(1 + 2\frac{h''^2}{C}\right) e^2.$$

3° La valeur de $x''_1$ doit, comme plus haut, recevoir la correction spéciale

$$(\delta x''_1) = -\frac{2}{3}\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} e^2,$$

à cause du terme du deuxième ordre négligé dans A'.

4° $g$ étant donné, et $\delta x''_1$ désignant l'ensemble des corrections que doit subir $x''_1$, l'équation (25) donne encore

$$\delta x''_1 - \frac{2}{3}\frac{y''_1}{C} e^2 = 0.$$

Or, $x''_1$ se trouve être ici fonction des deux variables $h''$ et C, si l'on conçoit $y''_1$ remplacé par sa valeur $h'' + f$, équation (22); il s'ensuit que l'équation précédente peut s'écrire

$$(\delta x''_1) + \left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)\delta h'' + \frac{dx''_1}{dC}\delta C - \frac{2}{3}\frac{y''_1}{C} e^2 = 0,$$

$\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)$ désignant la dérivée partielle de $x''_1$ relative à $h''$, et prise

en faisant abstraction de ce que C dépend implicitement de $h''$. Substituons les valeurs précédentes, il viendra

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}+\frac{h''}{C}\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)-2\left[1+2\frac{h''^2}{C}\right]\frac{dx''_1}{dC}+\frac{y''_1}{C}\right)e^2$$
$$+\left[\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)+4f\frac{dx''_1}{dC}\right]\delta Y_1=0,$$

d'où

$$\frac{\delta Y_1}{e^2}=\frac{2}{3}\,\frac{\dfrac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}+\dfrac{y''_1}{C}+\dfrac{h''}{C}\left(\dfrac{dx''_1}{dh''}\right)-2\left(1+2\dfrac{h''^2}{C}\right)\dfrac{dx''_1}{dC}}{\left(\dfrac{dx''_1}{dh''}\right)+4f\dfrac{dx''_1}{dC}}.$$

Voici maintenant comment on utilisera les différences obtenues dans la construction de la Table III, pour éviter le calcul de la dérivée $\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)$. D'après ce qui a été dit il y a un instant, on a

$$dx''_1=\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)dh''+\frac{dx''_1}{dC}\,dC:$$

on en tire, pour la valeur de la dérivée totale de $x''_1$ par rapport à $h''$, puisque cette quantité reste seule variable indépendante,

$$\frac{dx''_1}{dh''}=\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)+\frac{dx''_1}{dC}\,\frac{dC}{dh''};$$

or, on a

$$\frac{dC}{dh''}=\frac{dC}{dy''_1}\,\frac{dy''_1}{dh''}=4f,$$

en vertu des équations (22 *bis*) et (22): il vient donc

$$\frac{dx''_1}{dh''}=\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)+4f\frac{dx''_1}{dC},$$

et, par suite,

$$\frac{\delta Y_1}{e^2} = \frac{2}{3}\,\frac{\dfrac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \dfrac{y''_1}{C} + \dfrac{h''}{C}\dfrac{dx''_1}{dh''} - 2\left(1+2\dfrac{h''y''_1}{C}\right)\dfrac{dx''_1}{dC}}{\dfrac{dx''_1}{dh''}}, \qquad (31)$$

en mettant $y''_1$ à la place de $f+h''$.

Maintenant, soient

$$z = \frac{x''_1}{y''_1}, \qquad \zeta = \frac{f}{y''_1},$$

valeurs auxquelles on peut substituer les rapports $\frac{g}{Y_1}$ et $\frac{f}{Y_1}$. Le premier de ces rapports étant une fonction du second considéré comme variable indépendante, qui est donnée par la Table III, on aura

$$dz = \frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta,$$

et la valeur du coefficient différentiel $\frac{dz}{d\zeta}$ se déduira des différences successives de la quantité $\frac{g}{Y_1}$ et de la différence constante des valeurs de $\frac{f}{Y_1}$. Mais, $f$ étant une constante donnée, on a

$$dz = \frac{y''_1\,dx''_1 - x''_1\,dy''_1}{y_1''^2}, \qquad d\zeta = -\frac{f}{y_1''^2}\,dy''_1;$$

substituant ces valeurs dans la précédente équation, on en tire

$$y''_1\,dx''_1 = \left(x''_1 - f\frac{dz}{d\zeta}\right)dy''_1,$$

d'où, à cause de $\frac{dy''_1}{dh''} = 1$,

$$\frac{dx''_1}{dh''} = \frac{x''_1 - f\dfrac{dz}{d\zeta}}{y''_1} = \frac{g}{Y_1} - \frac{f}{Y_1}\,\frac{d\dfrac{g}{Y_1}}{d\dfrac{f}{Y_1}}. \qquad (32)$$

On obtiendrait une expression encore plus simple de la valeur de $\frac{dx''_1}{dk''}$, en posant

$$z' = \frac{x''_1}{f}, \qquad \zeta = \frac{f}{y''_1}.$$

(Les quantités $z'$ et $\zeta$ désignent ici les nombres contenus dans la troisième et la première colonne de la Table III.) Ces relations donnent

$$dz' = \frac{1}{f}\, dx''_1, \qquad d\zeta = -\frac{f}{y_1''^2}\, dy''_1;$$

et l'on a, à cause de $dz' = \frac{dz'}{d\zeta}\, d\zeta$,

$$\frac{1}{f}\, dx''_1 = -\frac{f}{y_1''^2}\frac{dz'}{d\zeta}\, dy''_1,$$

d'où, en vertu de $\frac{dy''_1}{dk''} = 1$,

$$\frac{dx''_1}{dk''} = -\frac{f^2}{y_1''^2}\frac{dz'}{d\zeta} = -\frac{f^2}{Y_1^2}\frac{d\frac{g}{f}}{d\frac{f}{Y_1}}. \tag{33}$$

Nous n'avons pas fait usage de cette formule, parce que la fonction $\frac{g}{f}$ n'était pas encore calculée, quand nous avons entrepris le calcul de la Table V, qui donne la valeur de $Y_1 \frac{\delta Y_1}{e^2}$.

Les expressions (32) et (33) sont, comme on le voit, entièrement formées de quantités que l'on peut déduire aisément de la Table III. En joignant l'une ou l'autre à la deuxième équation (18), on a tous les éléments nécessaires pour calculer $\frac{\delta Y_1}{e^2}$ à l'aide de la formule (31).

Les deux formules (30) et (31) ont été appliquées au calcul des deux Tables IV et V, qui donnent, l'une les valeurs de $\frac{Y_1}{e^2}\delta f$, et l'autre celles de $\frac{Y_1}{e^2}\delta Y_1$. Ces deux tables ont été placées à la suite de

la Table III. Nous les avons insérées dans ce mémoire, non pour en recommander l'usage, mais pour montrer, au contraire, que l'on peut se dispenser d'y recourir, attendu que les corrections que l'on en tire sont tout à fait négligeables dans la pratique. En effet, la plus grande valeur de $\frac{Y_1}{e^2}\delta f$ donnée par la Table IV, est $+0,0005$; elle se rapporte à $\frac{f}{Y_1} = 0,67$ : on en déduit $\delta f = 0,0005\,\frac{e^2}{Y_1^2}\,Y_1$; à cause de $e < h''$, il vient $\delta f < 0,0005\,\frac{h''^2}{Y_1^2}\,Y_1$ : or, $\frac{h''}{Y_1} = 1 - \frac{f}{Y_1}$ est ici égal à $0,33$, on a donc $\delta f < 0,0005\,(0,33)^2\,Y_1$, ou $\delta f < 0,000054\,Y_1$. Si l'on suppose, par exemple, $Y_1 = 18^m,5$, quantité qui n'est pas atteinte dans les constructions modernes, on aura $\delta f < 0^m,001$. On aurait de même, par la Table V, avec ces données, $-\delta Y_1 < 0^m,0048$. Nous ferons observer que ces nombres se rapportent à des surbaissements inusités : la limite de surbaissement admise dans la pratique est $\frac{1}{3}$; encore convient-il mieux de prendre le surbaissement entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. Or le surbaissement $\frac{1}{3}$ répond à une valeur de $\frac{f}{Y_1}$ égale à $0,733$ environ, d'après la Table III; en partant de ce nombre, et supposant $Y_1 = 18^m,5$, on trouverait $\delta f < 0^m,00026$; $-\delta Y_1 < 0^m,0012$. Les surbaissements plus voisins de $\frac{1}{4}$ donneraient des corrections encore plus faibles. On voit donc que, dans les limites de la pratique, on n'aura pas à craindre de faire une erreur de plus de 1 millimètre, ou à peu près, sur des différences de niveau qui seront à peine déterminées d'ailleurs à ce degré d'approximation, lorsqu'on se dispensera de corriger les valeurs tirées de la Table III (*).

---

(*) Si l'on tenait à appliquer les corrections de $f$ ou $Y_1$, on se servirait, pour les calculer, de nombres fournis par les Tables IV et V, et de la valeur approchée de $e$ obtenue au n° 39. A l'aide de la valeur corrigée de $f$ ou de $Y_1 = y'_1$, on calculerait au besoin la valeur corrigée de $h''$, par la formule (22) mise sous la forme

$$h'' = y'_1 - f - \frac{1}{3}\frac{h''}{f(2y'_1 - f)}\,e^2;$$

on aurait ensuite $e$ par l'équation (26) ou par l'équation (27) jointe à la deuxième

POUSSÉE DE LA VOÛTE ET DU MASSIF CONTRE LES CULÉES, INCLINAISON DU DERNIER JOINT SUR LA VERTICALE, VOLUME D'UNE DEMI-ARCHE ET DE LA PARTIE CORRESPONDANTE DU MASSIF.

41. La réduction des formules du n° 28 est très-simple; nous nous contenterons d'en présenter les résultats, renvoyant à ce numéro pour tout ce qui est relatif à l'exposé et à la discussion.

Les équations réduites qui donnent la valeur générale de l'angle $\alpha$ ont déjà été présentées n° 36; nous reproduirons l'expression de la tangente, en y mettant à la place de $y''$ l'ordonnée $y''_1$ du point inférieur de l'intrados fictif, et pour A sa valeur (3) : on aura ainsi, pour déterminer l'angle $\alpha_1$ du dernier joint avec la verticale, la formule

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{\sqrt{(y_1''^2 - h''^2)(B - y_1''^2)}}{q^2 + (h'' - e)^2 - y_1''^2}, \qquad (34)$$

à laquelle on pourra trouver plus commode de substituer les deux suivantes :

$$\sin\frac{1}{2}\alpha'_1 = \sqrt{\frac{y_1''^2 - h''^2}{C}}, \qquad \sin(\alpha_1 - \alpha'_1) = \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}\sin\alpha'_1. \qquad (34\ bis)$$

Ces formules serviront particulièrement dans le cas des arches incomplètes, dites *en arc de cercle,* et la valeur de $y''_1$ qu'il conviendra d'employer est celle donnée sous la marque $(w'')$,

$$y''_1 = f + h'' - \frac{1}{3}f\left[1 - \frac{(f + h'')(f + 2h'')}{q^2}\right]\frac{e^2}{q^2}. \qquad (35)$$

(On évitera l'emploi de ces formules en déduisant l'angle $\alpha_1$ par voie d'interpolation, lorsque les calculs ou tracés qui vont être indiqués dans les numéros suivants auront été effectués.)

---

équation (13); et dans le cas de $h$ donné, par la relation $e = h'' - h$. Disons enfin que les quantités $Q^2 = \frac{1}{4}C$ et $q^2 = 2e\mu_0$, nécessaires pour le calcul des coordonnées et le tracé, s'obtiendraient à l'aide des formules (23) et (13), si la valeur de $\mu_0$ ne se trouvait pas déjà déterminée.

Dans le cas des arches complètes ou *en anse de panier,* on aura simplement

$$\cot\alpha_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}. \tag{36}$$

Pour obtenir les diverses coordonnées qui se rapportent au plan de joint extrême, on aura d'abord

$$2\delta_1 = \frac{1}{3}(f + h'')\frac{e^2}{q^2}, \tag{37}$$

puis ensuite

$$x''_1 = g + 2\delta_1 \sin\alpha_1, \tag{38}$$

équation à laquelle on joindra la valeur précédente de $y''_1$ dans le cas des arches incomplètes; mais, dans le cas des arches complètes, il sera plus court d'employer les valeurs suivantes, tirées des relations obtenues n° 26:

$$\left.\begin{aligned} x''_1 &= g + \frac{1}{3}(f + h'')\frac{e^2}{q^2}, \\ y''_1 &= f + h'' + \frac{1}{3}h''\frac{e^2}{q^2}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Les piles ou culées sont soumises à l'action des pressions qui ont lieu dans le joint inférieur; la résultante de ces pressions, perpendiculaire au plan de ce joint, est

$$T_1 = \varpi\lambda e\mu_1, \tag{40}$$

et passe par le point dont les coordonnées sont

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x''_1 + \frac{1}{2}e\sin\alpha_1, \\ y_1 &= y''_1 - \frac{1}{2}e\cos\alpha_1. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Les composantes horizontale et verticale de $T_1$ sont d'ailleurs $T_1\cos\alpha_1$ et $T_1\sin\alpha_1$.

Les culées reçoivent en outre les actions horizontales exercées

par le massif qu'elles encaissent. La résultante de ces actions dépend des ordonnées des points supérieur et inférieur de l'extrados, qui sont

$$\left.\begin{aligned} y'_0 &= h, \\ y'_1 &= y''_1 - e\cos\alpha_1. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

La valeur de cette résultante est

$$U = \varpi\lambda\tfrac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2); \quad (43)$$

elle agit horizontalement dans le plan qui a pour ordonnée

$$u = \frac{\frac{1}{3}(y_1'^3 - y_0'^3)}{\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2)} = \frac{2}{3}\,\frac{y_1'^2 + y'_1 y'_0 + y_0'^2}{y'_1 + y'_0}. \quad (44)$$

Enfin, le volume V des matériaux de la demi-arche et de la partie du massif limitée horizontalement par des plans verticaux menés par les génératrices du sommet et du point inférieur de l'extrados, s'obtiendra en observant que le poids $\varpi V$ de ce volume est égal à la composante verticale $T_1 \sin\alpha_1$; on aura donc

$$V = \lambda e \mu_1 \sin\alpha_1, \quad (45)$$

expression dans laquelle $\sin\alpha_1$ pourra être pris égal à 1, lorsqu'il s'agira d'arches complètes.

A l'égard des piles, nous rappellerons que, si les extrados des deux arches voisines ne se coupent pas au-dessus des derniers plans de joint, ou si, en d'autres termes, ceux-ci conservent leur largeur, les assises horizontales des piles, à leur partie supérieure, seront soumises à des pressions verticales représentées par des hauteurs qui n'excéderont pas $\mu_1$; en sorte que, les piles étant supposées construites de matériaux aussi résistants que ceux de la voûte, il suffira, pour qu'elles résistent au poids des voûtes et du massif, que leur largeur ne soit pas inférieure à la somme

des projections horizontales des joints des naissances. L'excès de largeur à leur donner dépendra de l'action de causes étrangères, telles que celle de l'eau dans les grandes crues, etc.

CALCUL DES COORDONNÉES, INCLINAISON DES JOINTS, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS, ETC.

42. Nous renverrons au n° 29 pour ce qui est relatif à l'objet même des calculs; nous présenterons immédiatement l'expression du rayon de courbure de l'intrados fictif réduite en vertu de l'hypothèse $i = 1$. La formule ($s'''$), en ayant égard à la valeur de $Q^2$ tirée de la deuxième équation (3), se réduit à

$$\rho'' = \frac{Q^2 - \frac{1}{3} e^2 \cos\alpha}{y''}. \tag{46}$$

Nous profiterons de la forme simple de cette expression, pour obtenir une valeur de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ beaucoup plus approchée que celle à laquelle se réduirait notre formule ($t'''$) en y faisant $i = 1$.

L'expression de $\rho''$ donne

$$\rho''.y'' = Q^2 - \frac{1}{3} e^2 \cos\alpha.$$

On aura également en un autre point où la normale fait l'angle $\alpha + \Delta\alpha$ avec la verticale,

$$(\rho'' + \Delta\rho'')(y'' + \Delta y'') = Q^2 - \frac{1}{3} e^2 \cos(\alpha + \Delta\alpha).$$

Cette équation et la précédente donnent par soustraction

$$(y'' + \Delta y'')\Delta\rho'' + \rho''\Delta y'' = -\frac{1}{3} e^2 [\cos(\alpha + \Delta\alpha) - \cos\alpha]$$

$$= +\frac{2}{3} e^2 \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right) \sin\frac{1}{2}\Delta\alpha:$$

de celle-ci, on tire exactement

$$\Delta\rho'' = -\frac{\rho''\Delta y'' - \frac{2}{3}e^2 \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha}{y'' + \Delta y''}.$$

Si, maintenant, on substitue à $\Delta y''$ sa valeur approchée

$$\Delta y'' = \left(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha,$$

et que l'on remplace au numérateur $2\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha$ par $\Delta\alpha$, il viendra

$$\Delta\rho'' = -\frac{\rho''\left(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''\right) - \frac{1}{3}e^2}{y'' + \left(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha.$$

Faisant disparaître le dénominateur, et rangeant $\Delta\rho''^2$ avec les quantités connues, on en déduit

$$\Delta\rho'' = -\frac{\rho''^2 - \frac{1}{3}e^2 + \frac{1}{2}\Delta\rho''^2}{y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha.$$

On voit qu'en négligeant $e^2$ et $\Delta\rho''^2$, on ne négligera dans $\Delta\rho''$ que des termes du troisième ordre; les erreurs qui en résulteront se compenseront en partie, puisque les termes négligés sont de signes contraires (*). De cette manière il vient simplement

$$\frac{1}{2}\Delta\rho'' = -\frac{\frac{1}{2}\rho''^2\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}{y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha},$$

(*) On éviterait l'erreur que nous négligeons, en prenant $\rho''$ pour variable indépendante au lieu de $\alpha$, et faisant $\Delta\rho'' = -e\sqrt{\frac{2}{3}}$, dans ce cas, à cause de

d'où, en ajoutant $\rho''$ aux deux membres et réduisant,

$$\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'' = \rho'' \frac{y'' + \rho'' \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}{y'' + \frac{3}{2}\rho'' \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}. \tag{47}$$

Cette valeur est très-approchée; elle ne donne que 7 à 8 millimètres d'erreur sur des rayons de courbure de 60 mètres environ, et dans l'hypothèse de $\Delta\alpha = 2°$.

On peut obtenir d'autres expressions de même forme, et qui diffèrent de la précédente en ce que les deux facteurs 1 et $\frac{3}{2}$ de $\rho''$ au numérateur et au dénominateur, sont remplacés respectivement par $\frac{1}{2}$ et 1, ou même par 0 et $\frac{1}{2}$.

Voici l'usage de cette formule : en partant des valeurs initiales de $\alpha$, $y''$ et $x''$, qui sont respectivement zéro, $h''$ et zéro, et faisant varier l'angle $\alpha$ d'une quantité $\Delta\alpha$ égale à 2° ou 3°, les accroissements correspondants de $y''$ et $x''$ se déduiront de la valeur de $\rho''$ et de celle de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$, jointes aux deux suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \Delta y'' &= \left(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha, \\ \Delta x'' &= \left(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''\right)\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

---

$\Delta\cos\alpha = -2\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha$, l'équation précédente donnerait très-approximativement

$$\Delta\cos\alpha = \frac{y''}{\rho''}\frac{\Delta\rho''}{\rho'' + \frac{3}{2}\Delta\rho''}.$$

L'emploi de cette formule exigerait le recours aux Tables de sinus naturels; elle serait facile à appliquer de $\alpha = 0°$ à $\alpha = 90°$; mais, entre 90° et 180°, on ne pourrait s'en servir qu'autant que la constante $\frac{3}{2}\Delta\rho''$ aurait une valeur absolue inférieure au minimum de $\rho''$. Entre 180° et 360°, il faudrait faire $\Delta\rho'' = +e\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Non-seulement la valeur de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ sert à obtenir $\Delta y''$ et $\Delta x''$, mais elle offre en même temps un précieux moyen de vérifier les calculs successifs de $\rho''$ et $y''$. En effet, ayant obtenu, au moyen de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$, la différence $\Delta y''$; celle-ci ajoutée à $y''$ fera connaître la nouvelle ordonnée $y'' + \Delta y''$ du point où la normale fait avec la verticale l'angle $\alpha + \Delta\alpha$ : et, si l'on calcule à l'aide de cette ordonnée la nouvelle valeur du rayon de courbure, et que l'on fasse la demi-somme de cette valeur et de celle de $\rho''$ d'où l'on est parti, on obtiendra un résultat qui coïnciderait avec $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ si nos formules étaient rigoureusement exactes. Dans tous les cas, on prendra la différence entre $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ et la moyenne dont nous venons de parler. Cette différence ou erreur, qui prendra un signe déterminé suivant le sens de la soustraction, devra être très-faible, et sensiblement nulle au sommet de l'intrados; mais, si l'on détermine de la sorte plusieurs erreurs consécutives, en faisant varier chaque fois l'angle $\alpha$ de la quantité constante $\Delta\alpha$, il faudra que la marche de ces erreurs présente une régularité facile à reconnaître; autrement on serait averti de l'existence de fautes matérielles dans le calcul.

A l'aide des valeurs obtenues de $\alpha$, $y''$ et $x''$, les équations (8) et (9) permettront de calculer l'épaisseur variable $\varepsilon$ et les coordonnées de l'intrados réel et de l'extrados. On pourra vérifier ces dernières quantités et l'abscisse $x''$, en prenant leurs différences successives.

Nous observerons qu'il n'est pas nécessaire de conserver la même valeur de $\Delta\alpha$ dans toute la suite des calculs. S'il s'agit, par exemple, d'une arche complète, où l'angle $\alpha$ atteint sensiblement 90°, on pourra, à partir de 30° ou environ, augmenter l'intervalle $\Delta\alpha$ de moitié, sans inconvénient, si l'intervalle primitif s'est trouvé être assez petit de 0° à 30°; on pourrait même, à partir de 60°, doubler la valeur primitive de $\Delta\alpha$. Les trois séries de calculs devraient alors être vérifiées séparément.

SIMPLIFICATION DU TRACÉ DE L'INTRADOS FICTIF AU MOYEN DE SON RAYON DE COURBURE.

43. L'hypothèse ($i = 1$) réduit la valeur de $q'$, n° 30, à

$$q' = q - 2\frac{e}{q}\left(h'' - \frac{2}{3}e\right) = 2\frac{Q^2}{q}, \tag{49}$$

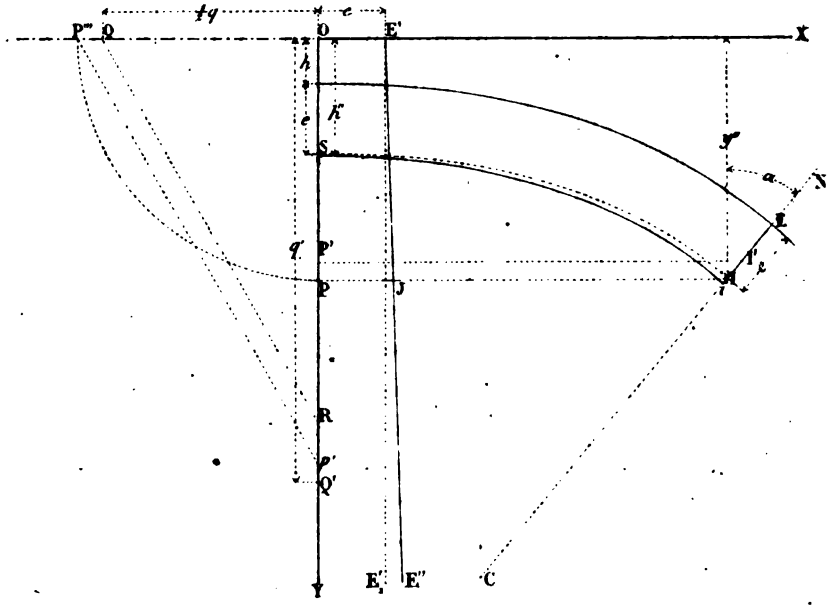
et celles de $\beta$ et $b$ à zéro. En même temps, la quantité $a$ devient

$$a = \frac{2}{3}\frac{e^2}{q}. \tag{50}$$

La forme qui en résulte pour l'équation du rayon de courbure de l'intrados fictif appropriée à la construction géométrique est

$$\rho'' = \frac{1}{2}q\frac{q' - a\cos\alpha}{y''}. \tag{51}$$

Nous allons indiquer sommairement la construction dont il s'agit.



Ayant mené deux axes rectangulaires, l'un OX horizontal, l'autre OY vertical, on fixera le sommet de l'intrados fictif sur l'axe des $y$, à la distance $\overline{OS} = h'' = h + e$. On marquera sur le prolongement de OX un point Q, à la distance $\overline{OQ} = \frac{1}{2} q$, et sur OY un autre point Q', à la distance $\overline{OQ'} = q'$. Supposons, pour plus de généralité, la construction de l'intrados fictif parvenue en un point I par lequel est menée la normale IN. Prenant sur cette normale la distance $\overline{II'} = a$ vers l'extrados, et projetant les points I et I' sur l'axe des $y$ en P et P', on aura $\overline{OP} = y''$ et $\overline{PP'} = a \cos\alpha$. On portera cette longueur $\overline{PP'}$ supposée positive, de Q' en $p'$ vers l'origine O, la distance $Op'$ sera égale à la quantité $q' - a\cos\alpha$. Si, ayant rabattu le point P sur le prolongement de l'axe des $x$ en P''', on joint ensuite $P'''p'$, et que l'on mène QR parallèle à $P'''p'$, la droite $\overline{OR}$ sera égale au rayon de courbure qu'il s'agissait de construire. En effet, les triangles semblables QOR, $P'''Op'$ donnent la relation

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{Op'}}{\overline{OP'''}},$$

qui coïncide avec l'équation (51) mise sous la forme

$$\frac{\rho''}{\frac{1}{2} q} = \frac{q' - a\cos\alpha}{y''}.$$

Portant $\overline{OR}$ de I en C sur la normale, le point C sera le centre de courbure de l'intrados fictif et de l'extrados à la fois, puisque ces deux courbes sont parallèles; pour construire l'extrados, on portera la distance $e$ qui les sépare de I en E.

La construction de l'intrados réel résultera de celle des épaisseurs vraies $\varepsilon$; leur expression est

$$\varepsilon = e + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} y''. \qquad (52)$$

Prenons à cet effet, sur l'axe des $x$, $\overline{OE'} = e$, et menons par le

point E′ une droite E′E′₁ parallèle à OY; menons encore, par le même point, une autre droite E′E″ faisant avec la première, et dans le sens indiqué par la figure, un angle dont la tangente soit $\frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}$ : l'abscisse PJ du point J de la droite E′E″, qui a pour ordonnée $y''$, sera égale à l'épaisseur réelle $\varepsilon$ du joint qui répond à IN. Si l'on porte donc sur la normale la longueur $\overline{Ei} = \overline{PJ}$ de E en $i$, le point $i$ appartiendra à l'intrados réel.

Il nous paraît suffisant d'avoir repris la construction simplifiée du rayon de courbure; nous renverrons, quant à l'usage qu'il convient d'en faire, au n° 30 qui contient déjà les indications nécessaires à cet égard.

### DONNÉES EXPÉRIMENTALES RELATIVES À LA LIMITE DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX EMPLOYÉS DANS LES CONSTRUCTIONS.

44. Nous nous sommes assez longuement étendu, n^os 6 et 23, sur la convenance qu'il y a de substituer dans les formules, aux charges par unité de surface, la hauteur d'une colonne prismatique de la matière employée, dont le poids produirait sur une surface horizontale la charge ou la pression qui a effectivement lieu : nous ne reviendrons pas sur ce sujet. Rappelant seulement que cette hauteur a été désignée par $\mu$, et qu'elle est liée à la pression $t$ par unité de surface, et au poids $\varpi$ de l'unité de volume par la relation

$$\mu = \frac{t}{\varpi},$$

nous allons présenter un tableau des diverses valeurs que prend cette quantité $\mu$, dans les expériences où l'on produit l'écrasement des matériaux, et au moment de cet écrasement.

Nous extrayons les données de ce tableau de l'*Introduction à la Mécanique industrielle* de M. Poncelet (p. 308); mais nous substituons aux densités le poids $\varpi$ du mètre cube. Pour déduire $\mu$ de ces données, il a suffi de multiplier par 10000 les résistances

relatives au centimètre carré et de diviser ensuite par $\varpi$, ce qui revenait à multiplier par 10 le quotient de la résistance par centimètre carré divisée par la densité. De cette manière nous avons formé le tableau suivant :

| MATÉRIAUX SOUMIS A L'ÉCRASEMENT. | POIDS du mètre cube. | CHARGE par centimètre carré. | VALEUR de $\mu$ au moment de l'écrasement. |
|---|---|---|---|
| *Pierres volcaniques, granitiques, siliceuses et argileuses.* | kil. | kil. | m. |
| Basaltes de Suède et d'Auvergne | 2 950 | 2 000 | 6 780 |
| Lave du Vésuve | 2 600 | 590 | 2 269 |
| Lave tendre de Naples | 1 970 | 230 | 1 167 |
| Porphyre | 2 870 | 2 470 | 8 606 |
| Granit vert des Vosges | 2 850 | 620 | 2 179 |
| Granit gris de Bretagne | 2 740 | 650 | 2 372 |
| Granit de Normandie | 2 660 | 700 | 2 632 |
| Granit gris des Vosges | 2 640 | 420 | 1 591 |
| Grès très-dur, blanc ou roussâtre | 2 500 | 870 | 3 480 |
| Grès tendre | 2 490 | 4 | 16 |
| Pierre porc ou puante (argileuse) | 2 660 | 680 | 2 556 |
| Pierre grise de Florence | 2 560 | 420 | 1 641 |
| *Pierres calcaires.* | | | |
| Marbre noir de Florence | 2 720 | 790 | 2 904 |
| Marbre blanc veiné, statuaire et turquin | 2 690 | 310 | 1 152 |
| Pierre noire de S$^{t}$-Fortunat, très-dure et coquilleuse | 2 650 | 630 | 2 377 |
| Roche de Châtillon, dure et un peu coquilleuse | 2 290 | 170 | 742 |
| Liais de Bagneux, très-dur et à grain fin | 2 440 | 440 | 1 803 |
| Roche douce de Bagneux | 2 080 | 130 | 625 |
| Roche d'Arcueil | 2 300 | 250 | 1 087 |
| Pierre de Saillancourt. 1$^{re}$ qualité | 2 410 | 140 | 581 |
| Pierre de Saillancourt. 2$^{e}$ qualité | 2 100 | 90 | 429 |
| Pierre ferme de Conflans | 2 070 | 90 | 435 |
| Pierre tendre (lambourde et vergelée) employée à Paris, résistant à l'eau | 1 820 | 60 | 329 |
| Lambourde de qualité inférieure, résistant mal à l'eau | 1 560 | 20 | 128 |
| Calcaire dur de Givry | 2 360 | 310 | 1 314 |

| MATÉRIAUX SOUMIS A L'ÉCRASEMENT. | POIDS du mètre cube. | CHARGE par centimètre carré. | VALEUR de $\mu$ au moment de l'écrasement. |
|---|---|---|---|
| | kil. | kil. | m. |
| Calcaire tendre de Givry | 2 070 | 120 | 580 |
| Calcaire jaune oolithique de Jaumont, près Metz — 1re qualité | 2 200 | 180 | 818 |
| Calcaire jaune oolithique de Jaumont, près Metz — 2e qualité | 2 000 | 120 | 600 |
| Calcaire jaune oolithique d'Amanvilliers, près Metz — 1re qualité | 2 000 | 120 | 600 |
| Calcaire jaune oolithique d'Amanvilliers, près Metz — 2e qualité | 2 000 | 100 | 500 |
| Roche vive de Saulny, près Metz (non rompue) | 2 550 | 300 | 1 174 |
| Roche jaune de Rozéreuilles, près Metz | 2 400 | 180 | 750 |
| Calcaire bleu à graphite, donnant la chaux hydraulique de Metz (non rompue) | 2 600 | 300 | 1 154 |
| *Briques.* | | | |
| Brique dure, très-cuite | 1 560 | 150 | 961 |
| Brique rouge | 2 170 | 60 | 276 |
| Brique rouge pâle (probablement mal cuite) | 2 090 | 40 | 191 |
| Brique de Hammersmith | » | 70 | » |
| Brique de Hammersmith, brûlée ou vitrifiée | » | 100 | » |
| *Plâtres et mortiers.* | | | |
| Plâtre gâché à l'eau | » | 50 | » |
| Plâtre gâché au lait de chaux | » | 73 | » |
| Mortier ordinaire en chaux et sable | 1 600 | 35 | 219 |
| Mortier en ciment ou tuileaux pilés | 1 460 | 48 | 329 |
| Mortier en grès pilé | 1 680 | 29 | 172 |
| Mortier en pouzzolane de Naples et de Rome | 1 460 | 37 | 253 |
| Enduit d'une conserve antique près de Rome | 1 550 | 76 | 490 |
| Enduit en ciment des démolitions de la Bastille | 1 490 | 55 | 369 |

Beaucoup d'ingénieurs expérimentés admettent comme étant dans de bonnes conditions les constructions où les charges permanentes n'excèdent pas le dixième de celles qui produiraient la rupture instantanée, c'est-à-dire celles où la valeur maximum de $\mu$ n'excède pas le dixième des valeurs de $\mu$ insérées au précédent

tableau. En se reportant aux pierres calcaires autres que les marbres et pierres noires, mais fermes et de bonne qualité, on verra que les valeurs correspondantes de $\mu$ réduites au dixième, sont à peu près comprises entre 180 mètres et 43 mètres, limites qui se rapportent : la première au liais de Bagneux, la seconde à la pierre de Saillancourt deuxième qualité. La limite 100 mètres résultant des chiffres admis par Navier, tient presque le milieu entre les deux nombres précédents. Si la charge permanente peut, dans tous les cas où l'on emploie des pierres de fort échantillon, être portée au dixième de la charge de rupture, on voit que l'emploi de pierres aussi résistantes que le liais de Bagneux permettrait de s'écarter beaucoup de la limite proposée par Navier; et aussi, combien il serait prudent de se tenir au-dessous de cette limite, s'il s'agissait de construire une arche avec des pierres calcaires telles que celles de Saillancourt ou de Conflans.

Dans le cas de forts échantillons, la valeur de $\mu_1$ qui répond au joint inférieur d'une arche de pont devrait donc se trouver au plus égale au $\frac{1}{10}$ de la valeur de $\mu$ donnée au tableau; et dans le cas de faibles échantillons, elle n'en devrait pas atteindre le $\frac{1}{15}$ ou le $\frac{1}{20}$. (Voir la *Mécanique industrielle* de M. Poncelet, n° 264.)

## RÉSUMÉ

### CONCERNANT L'ÉTABLISSEMENT DES ARCHES DE PONT DANS LESQUELLES LA VOÛTE ET LE MASSIF PEUVENT ÊTRE SUPPOSÉS D'ÉGALE DENSITÉ.

45. Nous nous proposons de présenter ici, d'une manière succincte, la suite des opérations à effectuer pour déterminer complétement une arche de pont, afin que les ingénieurs qui n'auraient pas lu notre mémoire, ou qui, l'ayant lu, auraient perdu de vue la marche que nous avons suivie, puissent cependant procéder sans difficulté aux diverses opérations qui se rattachent à l'établissement des arches de pont. Si, pour ne pas augmenter le nombre déjà considérable des répétitions, il nous arrive de renvoyer à

certains chapitres du mémoire, nous aimons à croire que le lecteur pourra comprendre sans peine ce qui fera l'objet du renvoi.

Les notations ayant été reproduites au commencement du n° 36, nous renverrons à ce numéro pour ce qui les concerne.

Dans les applications, on connaît ordinairement les épaisseurs des diverses couches de matériaux de densités différentes de celle du massif, qui forment la chaussée proprement dite; on devra commencer par calculer l'épaisseur d'une couche ayant la densité du massif, et dont le poids serait égal au poids des diverses couches dont nous venons de parler. L'axe des $x$ devra être placé au-dessous du niveau de la chaussée, d'une quantité égale à la différence entre l'épaisseur totale des couches données et l'épaisseur calculée, cette dernière étant supposée la plus petite; dans le cas contraire, il faudrait placer l'axe des $x$ plus haut que le niveau de la chaussée, d'une quantité égale à la même différence.

### USAGE DES TABLES.

*Arches incomplètes*, dites *en arc de cercle*. — Les données sont: $f$ la flèche, $g$ la demi-ouverture, et $Y_0$ l'ordonnée du sommet de l'intrados réel. (Si l'on se donnait l'ordonnée $Y_1$ des naissances, au lieu de $Y_0$, on en déduirait $Y_0 = Y_1 - f$). A l'aide de ces données, on calculera les rapports $\frac{g}{f}$ et $\frac{Y_0}{f}$; et la Table I (fin du mémoire) fera connaître, par voie d'interpolation, la valeur approchée de $\frac{Q^2}{f^2}$, d'où l'on déduira celle de $Q^2$.

Pour corriger la valeur approchée de $Q^2$, il faut obtenir une valeur approchée de l'épaisseur fictive $e$. La détermination de cette dernière dépend d'une nouvelle donnée, qui est l'une ou l'autre des quantités $\mu_1$ et $h$.

1° Soit donnée la quantité $\mu_1$ qui mesure l'intensité des pressions dans le joint des naissances, et que l'on pourra prendre égale au $\frac{1}{10}$ de la valeur de $\mu$ inscrite à la dernière colonne du tableau du n° 44, si les matériaux dont on dispose sont compris

dans ce tableau (autrement il faudrait déterminer $\mu_1$ par des expériences spéciales) : on fera

$$h'' = Y_0; \qquad (0)$$

puis, on aura

$$\mu_0 = \mu_1 - f - \frac{f(f + 2h'')}{3(\mu_1 - f)}, \qquad (I)$$

$$e = \frac{Q^2}{\mu_0 - h'' + \frac{2}{3}e}. \qquad (II)$$

Le calcul de $e$ se fera en négligeant d'abord $\frac{2}{3}e$ au dénominateur du deuxième membre, et mettant ensuite dans ce dénominateur, à la place de $e$, sa valeur trouvée; la seconde valeur obtenue sera d'une exactitude suffisante. Pour que cette valeur de $e$ soit admissible, il faudra que la quantité $h = h'' - e$ qu'on en tirera ne soit pas négative, et soit au moins égale à celle que réclame la pratique.

2° Soit donné $h$ au lieu de $\mu_1$, on aura

$$\varepsilon_0 = Y_0 - h, \qquad h'' = Y_0, \qquad e = h'' - h, \qquad (III)$$

et l'on pourra ne calculer les valeurs exactes de $\mu_0$ et $\mu_1$ par les formules

$$\mu_0 = h'' + \frac{Q^2}{e} - \frac{2}{3}e, \qquad \mu_1 = \mu_0 + f + \frac{f(f + 2h'')}{3\mu_0}, \qquad (IV)$$

qu'après avoir obtenu les valeurs corrigées de $Q^2$, $h''$ et $e$, comme il va être dit dans un instant.

La solution ne sera admissible qu'autant que $\mu_1$ sera compatible avec la nature des matériaux employés.

Dans l'un et l'autre cas, à l'aide des valeurs de $\frac{g}{f}$ et de $\frac{Y_0}{f}$; on tirera de la Table II, la valeur correspondante de $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$; et, de

celle-ci jointe à la valeur approchée de $e$; on déduira la correction $\delta(Q^2)$ de la constante $Q^2$.

Ayant ajouté cette correction à la valeur approchée de $Q^2$, on se servira de la valeur corrigée, pour calculer $h''$ par la formule

$$h'' = Y_0 - \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}Y_0, \qquad (V)$$

et l'on pourra calculer une valeur plus exacte de $e$ en faisant usage des formules précédentes et des valeurs corrigées de $h''$ et $Q^2$. On aura d'ailleurs dans le premier cas $h = h'' - e$, $\varepsilon_0 = Y_0 - h$, et dans les deux cas,

$$q^2 = 2e\mu_0 = 2\left[Q^2 + h''e - \frac{2}{3}e^2\right]. \qquad (VI)$$

*Arches complètes*, dites *en anse de panier*. — Les données sont ici deux des trois quantités $f$, $g$ et $Y_1$ prises arbitrairement. (On ne peut pas se donner ces trois quantités simultanément et satisfaire en même temps aux conditions de stabilité qui caractérisent notre théorie.) Ayant calculé le rapport des deux quantités données, la Table III fera connaître le rapport de l'inconnue à l'une des données, d'où l'on déduira l'inconnue elle-même. A la vérité, la solution n'est qu'approchée, théoriquement parlant; mais nous avons montré, n° 40, qu'on peut, en pratique, la regarder comme exacte, les erreurs restant toujours au-dessous de celles que comporte l'exécution. Au reste, nous avons donné, dans ce même numéro, le moyen de corriger la solution, à l'aide des Tables IV et V; mais, nous le répétons, il ne sera jamais nécessaire d'effectuer cette correction.

La solution déduite des tables ne devra être acceptée qu'autant qu'elle pourra satisfaire d'ailleurs à de certaines conditions relatives au débouché, au passage des bateaux, au niveau de la chaussée, etc. Autrement, il faudrait modifier l'une des données.

Pour déterminer l'épaisseur $e$, il est nécessaire de joindre une nouvelle donnée $\mu_1$ ou $h$ aux précédentes.

1° Soit donné $\mu_1$ d'après les mêmes considérations que dans le cas des arches incomplètes, on pourra calculer $e$ par les formules

$$y''_1 = Y_1, \qquad e = \frac{1}{2}\,\frac{f(2y''_1 - f)}{\mu_1 - y''_1\left[1 + \frac{y''_1}{6(\mu_1 - f)}\right]} \tag{VII}$$

(on réduirait, sans erreur sensible, le dénominateur de la valeur de $2e$ à $\mu_1 - y''_1$). Mais il sera préférable d'employer les suivantes:

$$\mu_0 = \mu_1 - f - \frac{f(2y''_1 - f)}{3(\mu_1 - f)}, \qquad e = \frac{1}{2}\,\frac{f(2y''_1 - f)}{\mu_0 - y''_1 + f + \frac{1}{3}e}; \tag{VIII}$$

la seconde de ces valeurs s'obtiendra en négligeant d'abord $\frac{1}{3}e$ au dénominateur. Les ordonnées $h''$ du sommet de l'intrados fictif et $h$ du sommet de l'extrados et l'épaisseur à la clef $\varepsilon_0$ se calculeront par les formules

$$h'' = y''_1 - f - \frac{1}{3}\,\frac{y''_1 - f}{f(2y''_1 - f)}e^2, \quad h = h'' - e, \quad \varepsilon_0 = y''_1 - f - h. \tag{IX}$$

En supposant $\mu_1$ notablement plus grand que $y''_1$, il faudra, pour que la solution soit admissible, que l'ordonnée $h$ ne soit point inférieure à une certaine limite fixée par les conditions particulières à l'établissement de la chaussée.

Si l'on veut plus d'exactitude, on recalculera $e$ par la formule

$$e = \frac{1}{2}\,\frac{y_1''^2 - h''^2}{\mu_0 - h'' + \frac{1}{3}e}. \tag{IX bis}$$

2° Soit donné $h$ au lieu de $\mu_1$, on aura, en vertu des formules précédentes,

$$\left.\begin{aligned} &y''_1 = Y_1, \qquad \varepsilon_0 = y''_1 - f - h, \\ &h'' = y''_1 - f - \frac{1}{3}\,\frac{y''_1 - f}{f(2y''_1 - f)}\varepsilon_0^2, \qquad e = h'' - h, \end{aligned}\right\} \tag{X}$$

et l'on calculera $\mu_1$ par les formules

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{y_1''^2 - h''^2}{2e} + h'' - \frac{1}{3}e, \\ \mu_1 &= \mu_0 + f + \frac{f(2y''_1 - f)}{3\mu_0}. \end{aligned}\right\} \quad (\text{XI})$$

Il faudra que la valeur de $\mu_1$ ne soit pas incompatible avec la résistance des matériaux; autrement, on devra modifier les données.

Dans les deux cas, connaissant $\mu_0$, on calculera

$$\left.\begin{aligned} q^2 &= 2e\mu_0; \\ Q^2 &= \frac{1}{2}f(2y''_1 - f) + \frac{1}{3}\frac{y_1''^2}{f(2y''_1 - f)}e^2 = \frac{1}{2}q^2 - h''e + \frac{2}{3}e^2. \end{aligned}\right\} \quad (\text{XII})$$

Si, dans le premier cas, on a évité de calculer $\mu_0$, on emploiera la formule

$$q^2 = 2\left[Q^2 + h''e - \frac{2}{3}e^2\right], \quad (\text{XIII})$$

qui donnera $q^2$ en fonction de $Q^2$ et offrira, d'ailleurs, un moyen de vérification.

### POUSSÉE DE LA VOÛTE ET DU MASSIF, INCLINAISON DU JOINT DES NAISSANCES, VOLUME DES MATÉRIAUX.

*Arches incomplètes,* dites *en arc de cercle.* — L'angle $\alpha_1$ du joint des naissances avec la verticale, s'obtiendra à l'aide des formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned} y''_1 &= f + h'' - \frac{1}{3}f\left[1 - \frac{(f+h'')(f+2h'')}{q^2}\right]\frac{e^2}{q^2}, \\ \sin\frac{1}{2}\alpha'_1 &= \sqrt{\frac{y_1''^2 - h''^2}{4Q^2}}, \qquad \sin(\alpha_1 - \alpha'_1) = \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}\sin\alpha'_1. \end{aligned}\right\} \quad (\text{XIV})$$

A la valeur précédente de $y''_1$, on joindra celle de l'abscisse $x''_1$ qui se déduit des équations

$$\left.\begin{aligned} 2\delta_1 &= \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(f+h''), \quad \text{ou} \quad 2\delta_1 = \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}(f+h''), \\ x''_1 &= g + 2\delta_1 \sin\alpha_1. \end{aligned}\right\} \text{(XV)}$$

*Arches complètes* ou *en anse de panier.* — On obtiendra l'angle $\alpha_1$ par la formule

$$\cot\alpha_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}, \qquad \text{(XVI)}$$

et les coordonnées du point inférieur de l'intrados fictif, par les relations

$$\left.\begin{aligned} x''_1 &= g + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(f+h''), \\ y''_1 &= f + h'' + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}h''. \end{aligned}\right\} \text{(XVII)}$$

Dans les deux espèces d'arches, la poussée $T_1$ exercée normalement au plan de joint des naissances contre les piles ou culées est

$$T_1 = \varpi\lambda e\mu_1; \qquad \text{(XVIII)}$$

les coordonnées du point d'application de cette résultante sont

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x''_1 + \frac{1}{2}e\sin\alpha_1, \\ y_1 &= y''_1 - \frac{1}{2}e\cos\alpha_1; \end{aligned}\right\} \text{(XIX)}$$

les composantes horizontale et verticale de $T_1$ sont d'ailleurs $T_1\cos\alpha_1$ et $T_1\sin\alpha_1$.

Les culées sont, en outre, soumises aux actions horizontales produites par le massif qu'elles encaissent; la résultante U de ces

actions dépend des ordonnées des points supérieur et inférieur de l'intrados, qui sont

$$\left.\begin{aligned} y'_0 &= h = h'' - e, \\ y'_1 &= y''_1 - e\cos\alpha_1 = y_1 - \tfrac{1}{2}e\cos\alpha_1; \end{aligned}\right\} \quad (\text{XX})$$

et l'on a

$$U = \varpi\lambda\,\tfrac{1}{2}\,(y_1'^2 - y_0'^2). \qquad (\text{XXI})$$

Cette résultante U agit horizontalement dans le plan dont l'ordonnée est

$$u = \frac{\frac{1}{3}(y_1'^2 - y_0'^2)}{\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2)} = \frac{2}{3}\,\frac{y_1'^2 + y'_1 y'_0 + y_0'^2}{y'_1 + y'_0}. \qquad (\text{XXII})$$

Enfin le volume V de la demi-arche et de la partie correspondante du massif a pour expression

$$V = \lambda e \mu_1 \sin\alpha_1. \qquad (\text{XXIII})$$

Dans les arches complètes on a sensiblement $\sin\alpha_1 = 1$.

(Voir n° 41 les remarques relatives à la largeur des piles.)

On peut obtenir une vérification relative aux poussées horizontales par l'équation suivante :

$$\varpi\lambda e\mu_0 = T_1\cos\alpha_1 + U, \qquad (\text{XXIII } bis)$$

qui se déduit de la considération de l'équilibre des forces qui sollicitent l'ensemble de la demi-voûte et du massif, projetées horizontalement, ou des équations du n° 9.

Les intensités, directions et points d'application des forces $T_1$ et U doivent servir de base à l'établissement des culées; il y aura encore à examiner quelles sont les plus grandes variations que peuvent subir ces quantités sous l'influence des surcharges accidentelles, tassements, etc., pour procéder avec sécurité à l'éta-

blissement des culées. Cependant, si l'on procède à l'égard de celles-ci comme nous l'avons fait à l'égard de la voûte, il pourra bien être suffisant de s'en tenir aux charges moyennes.

### CALCUL DES COORDONNÉES, INCLINAISONS DES JOINTS, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS, ETC.

Les calculs suivants supposent le projet bien arrêté : on n'aura besoin de les effectuer que lorsqu'il s'agira de passer à l'exécution.

$x''$, $y''$ et $\rho''$ étant les coordonnées et le rayon de courbure de l'intrados fictif correspondants à l'angle $\alpha$ d'un plan de joint avec la verticale, et $\Delta x''$, $\Delta y''$, $\Delta \rho''$ les accroissements finis que prennent les coordonnées et le rayon de courbure lorsqu'on fait croître $\alpha$ d'une quantité finie $\Delta\alpha$; on a, pour calculer ces accroissements, les formules

$$\left.\begin{aligned}
\rho'' &= \frac{Q^2 - \frac{1}{3} e^2 \cos\alpha}{y''}, \\
\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'' &= \rho'' \frac{y'' + \rho'' \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}{y'' + \frac{3}{2}\rho'' \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}, \\
\Delta y'' &= \left(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha, \\
\Delta x'' &= \left(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''\right)\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha,
\end{aligned}\right\} \text{(XXIV)}$$

dans lesquelles l'angle $\Delta\alpha$ en dehors des signes sinus et cosinus doit être exprimé en *rapport d'arc au rayon*. Cela se fait en multipliant le nombre de degrés correspondant par $\frac{\pi}{180^\circ}$ ($\pi$ désignant le rapport de la circonférence au diamètre) : on évite ce calcul en se servant des tables que l'on trouve pages 214 et suivantes des Tables de Callet. Les trois dernières des formules précédentes

sont seulement approximatives, et d'autant plus exactes que $\Delta\alpha$ est plus petit.

Dans la pratique, on prendra $\Delta\alpha$ égal à 2° ou 3°, et l'on fera varier l'angle $\alpha$ de la même quantité $\Delta\alpha$, du moins pendant une grande partie des calculs. On devra commencer ces calculs en attribuant à $\alpha$, $y''$ et $x''$ les valeurs zéro, $h''$ et zéro, qui ont lieu au sommet de l'intrados fictif. Chaque fois que l'on aura obtenu une nouvelle valeur de $\rho''$, il conviendra de l'ajouter à la précédente, et de prendre leur moyenne arithmétique; le résultat devra différer très-peu de la dernière valeur calculée de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$, ce qui offrira un moyen de vérification. (Voir n° 42.)

On déterminera ensuite l'épaisseur vraie $\varepsilon$ mesurée suivant la normale à l'extrados, par les formules

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'' \text{ ou } 2\delta = \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}y'', \quad \varepsilon = e + 2\delta; \qquad \text{(XXV)}$$

puis les coordonnées X, Y de l'intrados réel et celles $x'$, $y'$ de l'extrados, par les relations

$$\left.\begin{aligned} Y &= y'' + 2\delta\cos\alpha, & y' &= y'' - e\cos\alpha, \\ X &= x'' - 2\delta\sin\alpha, & x' &= x'' + e\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \text{(XXVI)}$$

Les valeurs de $y''$ et $\rho''$ sont vérifiées chaque fois, ainsi qu'il vient d'être dit; mais les autres quantités ne l'étant pas, il conviendra, à leur égard, d'employer le procédé des différences.

Parvenu à une valeur de $\alpha$ qui excède l'angle $\alpha_1$ déterminé plus haut, on recherchera par voie d'interpolation les valeurs correspondantes de Y et de X : ces valeurs devront très-peu différer de $Y_0 + f$ et de $g$ ($Y_0$ désignant l'ordonnée du sommet de l'intrados ou $h'' + 2\delta_0$), et offriront ainsi un moyen de vérification générale des calculs.

TRACÉ DU PROFIL DE LA VOÛTE AU MOYEN DU RAYON DE COURBURE DE L'INTRADOS FICTIF.

Indépendamment de la quantité $q$ déterminée précédemment, les constantes nécessaires pour effectuer le tracé sont :

$$\left.\begin{aligned} q' &= q - 2\frac{e}{q}\left(h'' - \frac{2}{3}e\right) = 2\frac{Q^2}{q}, \\ a &= \frac{2}{3}\frac{e^2}{q}, \\ \operatorname{tang}\widehat{E'_1E'E''} &= \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = \frac{a}{2q}. \end{aligned}\right\} \text{(XXVII)}$$

On remarquera que cet angle $\widehat{E'_1E'E''}$, dans le cas des arches complètes, se trouve être égal au complément de l'angle $\alpha_1$ du dernier joint avec la verticale, ou à l'inclinaison de ce joint sur l'horizon.

Nous renverrons au n° 43, pour ce qui est relatif à la construction du rayon de courbure $\rho''$ de l'intrados fictif. Ajoutons cependant une remarque sur la manière de procéder au tracé.

L'arc que l'on se propose de décrire avec un rayon $\rho''$ étant supposé très-petit, mais non pas infiniment petit, on atténuera l'erreur commise par ce fait, en décrivant le petit arc à l'aide du rayon de courbure correspondant ou à peu près au milieu de cet arc. A cet effet, il faudra s'y prendre à deux fois, du moins vers le sommet de l'intrados; la première fois, on déterminera le rayon de courbure correspondant à l'extrémité connue de l'arc à décrire, et l'on décrira avec ce rayon un arc d'une amplitude donnée en degrés. On prendra alors le milieu de cet arc et l'on construira le rayon de courbure correspondant; on se servira de ce nouveau rayon pour tracer définitivement l'arc d'amplitude donnée : on obtiendra de cette manière une suffisante exactitude. Lorsque l'on aura décrit de la sorte plusieurs petits arcs d'une même amplitude, on pourra prévoir assez approximativement la position du point milieu

de l'arc à décrire, pour éviter de faire le tracé de cet arc à deux reprises différentes.

Nous allons maintenant présenter quelques applications des règles qui viennent d'être exposées.

## APPLICATIONS.

### *ARCHES INCOMPLÈTES,* DITES *EN ARC DE CERCLE.*

#### PREMIER EXEMPLE.

*Pont d'Iéna, à Paris.*

46. Les calculs suivants ont été faits en partant de données que nous avons lieu de regarder comme un peu incertaines : mais il s'agit seulement ici de montrer par un exemple l'usage de nos tables et de nos formules; pour cette raison, nous nous sommes dispensé de faire des recherches dont le résultat nous eût peut-être obligé à recommencer les calculs.

Les données sont :

Demi-ouverture..... $g = 12^m,5$

Flèche..... $f = 3^m,0$

Ordonnée du sommet de l'intrados.. $Y_0 = 2^m,05413$ (*);

à ces quantités, nous joindrons la hauteur $\mu_1$ qui représente la charge dans le plan des naissances, et nous supposerons

$$\mu_1 = 65^m,042,$$

et le poids $\varpi$ du mètre cube,

$$\varpi = 2440 \text{ kil.}$$

(*) Les décimales qui figurent ici et dans la valeur de $\mu_1$ tiennent à ce que nous avons voulu utiliser des calculs faits en partant de la quantité $h$ comme donnée, laquelle était égale à $0^m,90$.

Nous suivrons la marche tracée dans le numéro précédent. Il vient d'abord

$$\frac{g}{f} = 4{,}16667; \qquad \frac{Y_0}{f} = 0{,}68471.$$

A l'aide du premier de ces deux nombres, la Table I donne aisément :

| $\frac{Y_0}{f}$ | $\frac{Q^2}{f^2}$ | 1re différ. | 2e diff. |
|---|---|---|---|
| 0,6 | 6,8902 | + 0,9381 | — 39 |
| 0,7 | 7,8283 | + 0,9342 | |
| 0,8 | 8,7625 | | |

d'où :

| | |
|---|---|
| pour 0,6..... | 6,8902 |
| partie prop..... | + 0,79466 |
| 2e diff..... | + 26 |
| $\frac{Q^2}{f^2}$ = | 7,6851; |

on en déduit

valeur approchée..... $Q^2 = 69{,}166$.

ÉQUATION (I).

$$2k'' = 4{,}108$$
$$\mu_1 - f = 62{,}041$$
$$-\frac{f(f+2k'')}{3(\mu_1 - f)} = -0{,}115$$
$$\mu_0 = 61{,}926$$
$$k'' = 2{,}054$$
$$\mu_0 - k'' = 59{,}872$$

ÉQUATION (II).

l. $Q^2$ = 1,8399

$\mu_0 - k'' = 59{,}872$..... l. = 1,7772

1re approximation..... l. $e$ = 0,0627

l. $\frac{2}{3}$ = 9,8239

$\frac{2}{3}e = 0{,}770$..... l. = 9,8866

dénom. = 60,642..... l. = 1,7828

2e approximation..... l. $e$ = 0,0571

La Table II donne, à l'aide des valeurs de $\frac{g}{f}$ et $\frac{Y_0}{f}$,

$$\frac{\delta(Q^2)}{e^2} = 0{,}3435 \ldots\ldots\ldots \quad l. = 9{,}5359$$

$$l.\ e^2 = 0{,}1142$$

d'où $\delta(Q^2) = 0{,}447 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad l. = 9{,}6501$

valeur corrigée..... $Q^2 = 69{,}613 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad l. = 1{,}84269$

ÉQUATION (V).

$$l.\ 6 = 0{,}7781$$

$$l.\ 6Q^2 = 2{,}6208$$

$$l.\ \frac{e^2}{6Q^2} = 7{,}4934$$

$Y_0 = 2{,}05413 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad l.\ Y_0 = 0{,}3126$

$-\frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} Y_0 = -0{,}00640 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad l. = 7{,}8060 -$

$k'' = 2{,}04773 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad l.\ k'' = 0{,}31127$

En se servant de cette valeur et de celle de $Q^2$, on peut obtenir une valeur plus exacte de l'épaisseur fictive $e$. A cet effet, on a :

ÉQUATION (II).

$\mu_0 = 61{,}926$

$\mu_0 - k'' = 59{,}878$

$\frac{2}{3} e = 0{,}766$ (*)

$l.\ Q^2 = 1{,}84269$

dénom. $= 60{,}644 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad l.$ dénom. $= 1{,}78279$

valeur corrigée..... $e = 1{,}1479 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad l.\ e = 0{,}05990$

$l.\ e^2 = 0{,}11980$

Nous devons faire remarquer que la surcharge $h = h'' - e = 0^m{,}90$ environ ne pèche pas par excès de petitesse : elle présenterait plutôt l'excès contraire.

(*) Ce nombre provient d'une première approximation obtenue en faisant usage de la valeur 0,770 employée plus haut.

ÉQUATION (VI).

$$\text{l. } 2 = 0{,}30103$$
$$\text{l. } e = 0{,}05990$$
$$\text{l. } \mu_0 = 1{,}79187$$
$$q^2 = 142{,}168 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{l. } q^2 = 2{,}15280$$

L'épaisseur à la clef, adoptée dans la construction du pont d'Iéna, est $1^m{,}25$, nombre qui excède de $0^m{,}1$ environ l'épaisseur fictive que nous venons de déterminer.

*Calcul de la poussée.*

ÉQUATIONS (XIV).

$$f + h'' = 5{,}04773 \ldots \quad \text{l.} = 0{,}70310$$
$$f + 2h'' = 7{,}09546 \ldots \quad \text{l.} = 0{,}85098$$
$$\text{c. l. } q^2 = 7{,}84720$$
$$\frac{(f+h'')(f+2h'')}{q^2} = 0{,}25193 \ldots \quad \text{l.} = 9{,}40128$$
$$1 - \text{id.} = 0{,}74807 \ldots \quad \text{l.} = 9{,}87394$$
$$\text{l. } \frac{e^2}{q^2} = 7{,}96700$$
$$3^e \text{ terme} = -0{,}00693 \ldots \quad \text{l.} = 7{,}84094$$
$$(*) \quad y''_1 = 5{,}0408 \ldots \quad \text{l. } y''_1 = 0{,}70250$$

$$y_1''^2 = 25{,}410 \ldots\ldots\ldots \quad \text{l.} = 1{,}40500$$
$$h''^2 = 4{,}193 \ldots\ldots\ldots \quad \text{l.} = 0{,}62254$$
$$y_1''^2 - h''^2 = 21{,}217 \ldots\ldots\ldots \quad \text{l.} = 1{,}32668$$
$$4Q^2 = 278{,}452 \ldots\ldots\ldots \quad \text{l.} = 2{,}44475$$
$$\text{diff.} = 8{,}88193$$
$$\frac{1}{2}\alpha'_1 = 16^\circ\ 1'\ 26'' \ldots\ldots \quad \text{l. sin} = 9{,}44097$$
$$\alpha'_1 = 32\ \ 2\ \ 52 \ldots\ldots \quad \text{l. sin} = 9{,}7248$$
$$\alpha_1 - \alpha'_1 = 0\ \ 5\ \ 41 \ldots\ldots \quad \text{l. sin} = 7{,}2182$$
$$\alpha_1 = 32^\circ\ 8'\ 33'' \ (**) \ldots \quad \text{l. sin } \alpha_1 = 9{,}72593$$
$$\text{l. cos } \alpha_1 = 9{,}92774$$

Dans les calculs suivants, nous déterminerons les poussées par unité de longueur de la voûte, mesurée parallèlement aux génératrices. Pour avoir les poussées totales, il suffira de multiplier ensuite par la longueur $\lambda$.

(*) Si, à l'aide des valeurs que l'on vient de déterminer, on calcule $x''_1$, puis $g$ par les formules du n° 36, on trouvera pour la valeur de $g$ précisément celle qui nous a servi de point de départ. L'accord de nos Tables avec le calcul direct se trouve vérifié dans cet exemple; il en est de même pour les deux exemples présentés plus loin. Or on pouvait craindre que la substitution des différences finies aux différentielles ne laissât subsister des erreurs un peu sensibles.

(**) En calculant $\alpha_1$ par l'équation (6), n° 36, on trouve $\alpha_1 = 32^\circ\ 8'\ 37''$; la différence $4''$ entre cette valeur et celle que donnent les équations (XIV) est tout à fait négligeable.

ÉQUATIONS (XV).

$$l.\,(f + k'') = 0{,}7031$$

$$l.\,\frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} = 7{,}4934$$

$$g = 12{,}5 \qquad l.\,2\delta_1 = 8{,}1965$$

$$2\delta_1 \sin\alpha_1 = 0{,}0084 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad l. = 7{,}9224$$

$$x''_1 = 12{,}5084$$

ÉQUATION (XVIII).

$$l.\,\varpi = 3{,}38739$$

$$l.\,\mu_1 = 1{,}81319$$

$$l.\,e = 0{,}05990$$

Poussée normale au plan des naissances.... $\frac{T_1}{\lambda} = 182171$ kil..... $l. = 5{,}26048$

Composante verticale..... $\frac{T_1}{\lambda}\sin\alpha_1 = 96919$..... $l. = 4{,}98641$

Composante horizontale..... $\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1 = 154248$..... $l. = 5{,}18822$

ÉQUATIONS (XIX) ET (XX).

$$l.\,\frac{1}{2}e = 9{,}75887$$

$$+\frac{1}{2}e\sin\alpha_1 = +\ 0{,}30535 \ldots\ldots \quad l. = 9{,}48480$$

$$-\frac{1}{2}e\cos\alpha_1 = -\ 0{,}48597 \ldots\ldots \quad l. = 9{,}68661$$

$$x_1 = 12{,}8138$$

$$y_1 = 4{,}5548$$

$$y'_0 = 0{,}8998 \ldots\ldots \quad l. = 9{,}95415$$

$$y'_1 = 4{,}0688 \ldots\ldots \quad l. = 0{,}60947$$

ÉQUATION (XXI).

$$y_1'^2 = 16{,}5550 \ldots\ldots \quad l. = 1{,}21893$$

$$y_0'^2 = 0{,}8097 \ldots\ldots \quad l. = 9{,}90830$$

$$y_1'^2 - y_0'^2 = 15{,}7453$$

$$\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2) = 7{,}8726 \ldots\ldots \quad l. = 0{,}89612$$

$$l.\,\varpi = 3{,}38739$$

$$\frac{U}{\lambda} = 19209 \text{ kil} \ldots\ldots \quad l. = 4{,}28351$$

ÉQUATION (XXII).

$$y_1'^3 = 67{,}3597 \ldots\ldots \quad l. = 1{,}82840$$

$$y_0'^3 = 0{,}7285 \ldots\ldots \quad l. = 9{,}86245$$

$$y_1'^3 - y_0'^3 = 66{,}6312$$

$$\frac{1}{3}(y_1'^3 - y_0'^3) = 22{,}2104 \ldots\ldots \quad l. = 1{,}34655$$

$$u = 2{,}8212 \ldots\ldots \quad l. = 0{,}45043$$

ÉQUATION (XXIII *bis*). *Vérification.*

$$\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1 + \frac{U}{\lambda} = 173457 \text{ kil} \ldots\ldots \quad l. = 5{,}23919$$

$$l.\,e\mu_0 = 1{,}85177$$

$$l.\,\varpi e\mu_0 = 5{,}23916$$

erreur = 3

La résultante $\frac{T_1}{\lambda}$ des pressions qui sollicitent les culées normalement au plan des naissances se trouve déterminée, ainsi que les coordonnées $x_1$ et $y_1$ de son point d'application; et sa direction est définie par l'angle $\alpha_1$. La résultante $\frac{U}{\lambda}$ des pressions horizontales qu'exerce le massif sur la face verticale de la culée passant par l'extrémité inférieure de l'extrados, et l'ordonnée $u$ de son point d'application, sont aussi connues par les calculs précédents. Ces données, jointes à la connaissance de la profondeur à laquelle doivent descendre les fondations des culées et de la résistance du sol avoisinant, doivent être complétées par des hypothèses sur l'action des surcharges accidentelles et l'effet des tassements, pour qu'il soit possible de procéder à la détermination de la forme et des dimensions inconnues des culées.

Au lieu du volume V des matériaux, nous allons calculer la surface $\frac{V}{\lambda}$ du profil de la demi-arche et du massif.

ÉQUATION (XXIII).

$$\frac{V}{\lambda} = 39^{m.q}{,}721 \ldots\ldots \quad l. = 1{,}59902.$$

Il nous reste à déterminer la forme de la voûte.

*Calcul des coordonnées, inclinaisons, rayons de courbure, épaisseurs.*

Le tableau ci-joint présente le détail des calculs numériques. Ces calculs sont basés sur les formules (XXIV), (XXV) et (XXVI), dans lesquelles on a fait l'angle constant $\Delta\alpha$ égal à 2°.

ARCHES INCOMPLÈTES,

DONNÉES DU PONT D'IÉNA, À PARIS. — CALCUL DES COORDONNÉES,

FORMULES.

$$\rho'' = \frac{Q^2 - \frac{1}{2} e^2 \cos\alpha}{y''},$$

$$\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'' = \rho'' \frac{y'' + \rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha}{y'' + \frac{3}{2}\rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha},$$

$$\Delta y'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'') \sin(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\,\Delta\alpha,$$

$$\Delta x'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'') \cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\,\Delta\alpha.$$

*Pour vérification :*

$$\rho''_m + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''_m - \tfrac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1}) = \text{erreur}.$$

---

$$y' = y'' - e\cos\alpha,$$

$$x' = x'' + e\sin\alpha,$$

$$2\delta = \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} y'',$$

$$\varepsilon = e + 2\delta,$$

$$Y = y'' + 2\delta\cos\alpha,$$

$$X = x'' - 2\delta\sin\alpha.$$

---

CONSTANTES.

Soit $\Delta\alpha = 2°$.

$\Delta\alpha = 0{,}0349066$

$\text{l.}\,\Delta\alpha = 8{,}54291$

$Q^2 = 69{,}613$

$\text{l.}\,e^2 = 0{,}11980$

$\text{l.}\,3 = 0{,}47712$

$\text{l.}\,\frac{1}{2}e^2 = 9{,}64268$

$k'' = y''_0 = 2^m{,}04773$

$x''_0 = 0$

$\text{l.}\,\frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} = 7{,}4934$

| $\alpha$ | 0° | 2° | 4° | 6° | 8° | 10° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| l. sin $\alpha$ | $\overline{\infty}$ | 8,54282 | 8,84358 | 9,01923 | 9,14356 | 9,23967 |
| l. cos $\alpha$ | 0 | 9,99974 | 9,99894 | 9,99761 | 9,99575 | 9,99335 |
| l. sin $(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$ | 8,24186 | 8,71880 | 8,94030 | 9,08589 | 9,19433 | 9,28060 |
| l. cos $(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$ | 9,99993 | 9,99940 | 9,99834 | 9,99676 | 9,99462 | 9,99195 |
| l. sin $(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 6,78477 | 7,26171 | 7,48321 | 7,62880 | 7,73724 | 7,82351 |
| l. cos $(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 8,54284 | 8,54231 | 8,54125 | 8,53967 | 8,53753 | 8,53486 |
| l. $\frac{1}{2}e^2\cos\alpha$ | 9,6427 | 9,6424 | 9,6416 | 9,6403 | 9,6384 | 9,6360 |
| $y''$ | 2,04773 | 2,06821 | 2,12845 | 2,22518 | 2,35382 | 2,50938 |
| $x''$ | 0 | 1,17311 | 2,32251 | 3,42811 | 4,47584 | 5,45775 |
| $\frac{1}{2}e^2\cos\alpha$ | 0,4392 | 0,4389 | 0,4382 | 0,4368 | 0,4349 | 0,4325 |
| $Q^2 - \frac{1}{2}e^2\cos\alpha$ | 69,174 | 69,174 | 69,175 | 69,176 | 69,178 | 69,181 |
| l. $[Q^2 - \frac{1}{2}e^2\cos\alpha]$ | 1,83994 | 1,83994 | 1,83995 | 1,83996 | 1,83997 | 1,83999 |
| l. $y''$ | 0,31127 | 0,31559 | 0,32806 | 0,34737 | 0,37177 | 0,39957 |
| l. $\rho''$ | 1,52867 | 1,52435 | 1,51189 | 1,49259 | 1,46820 | 1,44041 |
| l. $\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 8,31344 | 8,78606 | 8,99510 | 9,12139 | 9,20544 | 9,26393 |
| $\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 0,02058 | 0,06110 | 0,09888 | 0,13225 | 0,16049 | 0,18361 |
| $y'' + \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 2,06831 | 2,12931 | 2,22733 | 2,35743 | 2,51431 | 2,69300 |
| $\frac{1}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 0,01029 | 0,03055 | 0,04944 | 0,06612 | 0,08024 | 0,09181 |
| $y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 2,07860 | 2,15986 | 2,27677 | 2,42355 | 2,59455 | 2,78451 |
| l. $[y'' + \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$ | 0,31562 | 0,32824 | 0,34778 | 0,37244 | 0,40042 | 0,43024 |
| l. $[y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$ | 0,31777 | 0,33443 | 0,35732 | 0,38445 | 0,41406 | 0,44480 |
| l. $[\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'']$ | 1,52652 | 1,51816 | 1,50235 | 1,48058 | 1,45456 | 1,42580 |
| l. $\Delta y''$ | 8,31129 | 8,77987 | 8,98556 | 9,10938 | 9,19180 | 9,24937 |
| l. $\Delta x''$ | 0,06936 | 0,06047 | 0,04360 | 0,02025 | 9,99209 | 9,96071 |
| $\Delta y''$ | 0,02048 | 0,06024 | 0,09673 | 0,12864 | 0,15556 | 0,17759 |
| $\Delta x''$ | 1,17311 | 1,14940 | 1,10560 | 1,04773 | 0,98195 | 0,91351 |
| $\rho''$ | 33,7808 | 33,4464 | 32,5005 | 31,0878 | 29,3900 | 27,5689 |
| Vérification: $\rho''_m + \rho''_{m+1}$ | 67,227 | 65,947 | 63,588 | 60,478 | 56,959 | 53,317 |
| Vérification: $\frac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1})$ | 33,614 | 32,973 | 31,794 | 30,239 | 28,480 | 26,659 |
| Vérification: $\rho''_m + \frac{1}{2}\Delta\rho''_m$ | 33,614 | 32,973 | 31,794 | 30,240 | 28,481 | 26,660 |
| Vérification: erreur | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| l. $e\sin\alpha$ | $\overline{\infty}$ | 8,60872 | 8,90348 | 9,07913 | 9,20346 | 9,29953 |
| l. $e\cos\alpha$ | 0,05990 | 0,05964 | 0,05884 | 0,05751 | 0,05565 | 0,05323 |
| $e\sin\alpha$ | 0 | 0,04006 | 0,08007 | 0,11999 | 0,15976 | 0,19933 |
| $e\cos\alpha$ | 1,14790 | 1,14720 | 1,14509 | 1,14160 | 1,13671 | 1,13044 |
| $y'$ | 0,8998 | 0,9210 | 0,9834 | 1,0836 | 1,2171 | 1,3789 |
| $x'$ | 0 | 1,2132 | 2,4026 | 3,5481 | 4,6356 | 5,6571 |
| l. $2\delta$ | 7,8047 | 7,8090 | 7,8215 | 7,8408 | 7,8652 | 7,8930 |
| l. $2\delta\sin\alpha$ | $\overline{\infty}$ | 6,3518 | 6,6651 | 6,8600 | 7,0088 | 7,1327 |
| l. $2\delta\cos\alpha$ | 7,8047 | 7,8087 | 7,8204 | 7,8384 | 7,8609 | 7,8863 |
| $2\delta$ | 0,00638 | 0,00644 | 0,00663 | 0,00692 | 0,00733 | 0,00781 |
| $2\delta\sin\alpha$ | 0 | 0,00022 | 0,00046 | 0,00072 | 0,00102 | 0,00130 |
| $2\delta\cos\alpha$ | 0,00638 | 0,00644 | 0,00661 | 0,00689 | 0,00726 | 0,00770 |
| $\varepsilon$ | 1,1543 | 1,1543 | 1,1545 | 1,1548 | 1,1552 | 1,1557 |
| Y | 2,0541 | 2,0747 | 2,1351 | 2,2321 | 2,3611 | 2,5171 |
| X | 0 | 1,1729 | 2,3220 | 3,4274 | 4,4748 | 5,4564 |

DITES *EN ARC DE CERCLE.*

INCLINAISONS DES PLANS DE JOINT, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS.

| 12° | 14° | 16° | 18° | 20° | 22° | 24° | 26° | 28° | 30° | 32° | 34° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9,31788 | 9,38368 | 9,44034 | 9,48998 | 9,53405 | 9,57358 | 9,60931 | 9,64184 | 9,67161 | 9,69897 | 9,72421 | 9,74756 |
| 9,99040 | 9,98690 | 9,98284 | 9,97821 | 9,97299 | 9,96717 | 9,96073 | 9,95366 | 9,94593 | 9,93753 | 9,92842 | 9,91857 |
| 9,35209 | 9,41300 | 9,46594 | 9,51264 | 9,55433 | 9,59188 | 9,62595 | 9,65705 | 9,68557 | 9,71184 | 9,73611 | 9,75859 |
| 9,98872 | 9,98494 | 9,98060 | 9,97567 | 9,97015 | 9,96403 | 9,95728 | 9,94988 | 9,94182 | 9,93307 | 9,92359 | 9,91336 |
| 7,89500 | 7,95591 | 8,00885 | 8,05555 | 8,09724 | 8,13479 | 8,16886 | 8,19996 | 8,22848 | 8,25475 | 8,27902 | 8,30150 |
| 8,53163 | 8,52785 | 8,52351 | 8,51858 | 8,51306 | 8,50694 | 8,50019 | 8,49279 | 8,48473 | 8,47598 | 8,46650 | 8,45627 |
| 9,6331 | 9,6296 | 9,6255 | 9,6209 | 9,6157 | 9,6098 | 9,6034 | 9,5963 | 9,5886 | 9,5802 | 9,5711 | 9,5612 |
| 2,68695 | 2,88230 | 3,09184 | 3,31264 | 3,54235 | 3,77908 | 4,02134 | 4,26792 | 4,51783 | 4,77028 | 5,02461 | 5,28026 |
| 6,37131 | 7,21747 | 7,99948 | 8,72168 | 9,38881 | 10,00552 | 10,57625 | 11,10505 | 11,59553 | 12,05097 | 12,47425 | 12,86792 |
| 0,4296 | 0,4262 | 0,4222 | 0,4177 | 0,4128 | 0,4072 | 0,4012 | 0,3947 | 0,3878 | 0,3804 | 0,3725 | 0,3641 |
| 69,184 | 69,187 | 69,191 | 69,195 | 69,200 | 69,206 | 69,212 | 69,218 | 69,225 | 69,233 | 69,241 | 69,249 |
| 1,84001 | 1,84003 | 1,84005 | 1,84008 | 1,84011 | 1,84014 | 1,84018 | 1,84022 | 1,84026 | 1,84031 | 1,84036 | 1,84041 |
| 0,42926 | 0,45974 | 0,49022 | 0,52017 | 0,54929 | 0,57739 | 0,60437 | 0,63022 | 0,65493 | 0,67854 | 0,70110 | 0,72266 |
| 1,41075 | 1,38029 | 1,34983 | 1,31991 | 1,29082 | 1,26275 | 1,23581 | 1,21000 | 1,18533 | 1,16177 | 1,13926 | 1,11775 |
| 9,30575 | 9,33620 | 9,35868 | 9,37546 | 9,38806 | 9,39754 | 9,40467 | 9,40996 | 9,41381 | 9,41652 | 9,41828 | 9,41925 |
| 0,20219 | 0,21687 | 0,22839 | 0,23739 | 0,24438 | 0,24977 | 0,25390 | 0,25702 | 0,25930 | 0,26093 | 0,26199 | 0,26257 |
| 2,88914 | 3,09917 | 3,32023 | 3,55003 | 3,78673 | 4,02885 | 4,27524 | 4,52494 | 4,77713 | 5,03121 | 5,28660 | 5,54283 |
| 0,10109 | 0,10843 | 0,11419 | 0,11869 | 0,12219 | 0,12488 | 0,12695 | 0,12851 | 0,12965 | 0,13046 | 0,13099 | 0,13129 |
| 2,99023 | 3,20760 | 3,43442 | 3,66872 | 3,90892 | 4,15373 | 4,40219 | 4,65345 | 4,90678 | 5,16167 | 5,41759 | 5,67412 |
| 0,46077 | 0,49125 | 0,52117 | 0,55023 | 0,57826 | 0,60518 | 0,63096 | 0,65561 | 0,67917 | 0,70167 | 0,72318 | 0,74373 |
| 0,47570 | 0,50618 | 0,53585 | 0,56451 | 0,59206 | 0,61844 | 0,64367 | 0,66778 | 0,69080 | 0,71279 | 0,73381 | 0,75390 |
| 1,39582 | 1,36536 | 1,33515 | 1,30563 | 1,27702 | 1,24949 | 1,22310 | 1,19783 | 1,17370 | 1,15065 | 1,12863 | 1,10758 |
| 9,29082 | 9,32127 | 9,34400 | 9,36118 | 9,37426 | 9,38428 | 9,39196 | 9,39779 | 9,40218 | 9,40540 | 9,40765 | 9,40908 |
| 9,92745 | 9,89321 | 9,85866 | 9,82421 | 9,79008 | 9,75643 | 9,72329 | 9,69062 | 9,65843 | 9,62663 | 9,59513 | 9,56385 |
| 0,19535 | 0,20954 | 0,22080 | 0,22971 | 0,23673 | 0,24226 | 0,24658 | 0,24991 | 0,25245 | 0,25433 | 0,25565 | 0,25650 |
| 0,84616 | 0,78201 | 0,72220 | 0,66713 | 0,61671 | 0,57073 | 0,52880 | 0,49048 | 0,45544 | 0,42328 | 0,39367 | 0,36631 |
| 25,7484 | 24,0044 | 22,3785 | 20,8886 | 19,5353 | 18,3126 | 17,2112 | 16,2181 | 15,3225 | 14,5134 | 13,7803 | 13,1145 |
| 49,753 | 46,383 | 43,267 | 40,424 | 37,848 | 35,524 | 33,429 | 31,541 | 29,836 | 28,294 | 26,895 | » |
| 24,877 | 23,192 | 21,634 | 20,212 | 18,924 | 17,762 | 16,715 | 15,770 | 14,918 | 14,147 | 13,447 | » |
| 24,878 | 23,193 | 21,635 | 20,213 | 18,924 | 17,762 | 16,715 | 15,770 | 14,918 | 14,147 | 13,447 | » |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | » |
| 9,37778 | 9,44358 | 9,50024 | 9,54988 | 9,59395 | 9,63348 | 9,66921 | 9,70174 | 9,73151 | 9,75887 | 9,78411 | 9,80746 |
| 0,05030 | 0,04680 | 0,04274 | 0,03811 | 0,03289 | 0,02707 | 0,02063 | 0,01356 | 0,00583 | 9,99743 | 9,98832 | 9,97847 |
| 0,23866 | 0,27770 | 0,31640 | 0,35472 | 0,39260 | 0,43001 | 0,46689 | 0,50320 | 0,53890 | 0,57394 | 0,60829 | 0,64189 |
| 1,12277 | 1,11378 | 1,10342 | 1,09172 | 1,07867 | 1,06431 | 1,04865 | 1,03172 | 1,01352 | 0,99410 | 0,97346 | 0,95164 |
| 1,5642 | 1,7685 | 1,9884 | 2,2209 | 2,4637 | 2,7146 | 2,9727 | 3,2362 | 3,5043 | 3,7762 | 4,0511 | 4,3286 |
| 6,6100 | 7,4952 | 8,3159 | 9,0764 | 9,7814 | 10,4355 | 11,0431 | 11,6082 | 12,1344 | 12,6249 | 13,0825 | 13,5098 |
| 7,9227 | 7,9531 | 7,9836 | 8,0136 | 8,0427 | 8,0708 | 8,0978 | 8,1236 | 8,1483 | 8,1719 | 8,1945 | 8,2161 |
| 7,2406 | 7,3368 | 7,4239 | 7,5036 | 7,5767 | 7,6444 | 7,7071 | 7,7654 | 7,8199 | 7,8708 | 7,9187 | 7,9637 |
| 7,9131 | 7,9400 | 7,9664 | 7,9918 | 8,0157 | 8,0380 | 8,0585 | 8,0773 | 8,0942 | 8,1094 | 8,1229 | 8,1347 |
| 0,00837 | 0,00898 | 0,00963 | 0,01032 | 0,01103 | 0,01177 | 0,01253 | 0,01329 | 0,01407 | 0,01486 | 0,01565 | 0,01645 |
| 0,00174 | 0,00217 | 0,00265 | 0,00319 | 0,00377 | 0,00441 | 0,00510 | 0,00583 | 0,00660 | 0,00743 | 0,00829 | 0,00920 |
| 0,00819 | 0,00871 | 0,00926 | 0,00981 | 0,01037 | 0,01091 | 0,01144 | 0,01195 | 0,01242 | 0,01286 | 0,01327 | 0,01364 |
| 1,1563 | 1,1568 | 1,1575 | 1,1582 | 1,1589 | 1,1597 | 1,1604 | 1,1612 | 1,1620 | 1,1628 | 1,1635 | 1,1643 |
| 2,6951 | 2,8910 | 3,1011 | 3,3224 | 3,5527 | 3,7900 | 4,0328 | 4,2799 | 4,5302 | 4,7831 | 5,0379 | 5,2939 |
| 6,3696 | 7,2153 | 7,9968 | 8,7185 | 9,3850 | 10,0011 | 10,5712 | 11,0992 | 11,5889 | 12,0435 | 12,4660 | 12,8587 |

Chaque colonne verticale est calculée isolément jusqu'à $\rho''$. Ajoutant $\Delta y''$ et $\Delta x''$ aux valeurs de $y''$ et $x''$ qui se trouvent dans la même colonne, on obtient les $y''$ et $x''$ de la colonne suivante, et l'on continue les calculs jusqu'à $\rho''$ inclusivement. Revenant alors à la colonne précédente, on y effectue la vérification indiquée, et l'on poursuit ainsi les déterminations successives jusqu'à la dernière colonne verticale. La marche des erreurs, par sa régularité, indique suffisamment l'exactitude de toutes les valeurs obtenues, sauf celle de $x''$. L'abscisse $x''$, de même que les coordonnées $x'$, $y'$, X, Y et les épaisseurs $\varepsilon$, ne peuvent être vérifiées qu'à l'aide de leurs différences successives.

Le calcul qui vient d'être présenté constitue une véritable intégration par quadratures : il convient d'en comparer le résultat à celui que fournissent nos Tables ou que donne l'intégration effectuée au moyen des fonctions elliptiques.

Nous avons trouvé $y''_1 = 5^m,0408$, $x''_1 = 12^m,5084$, et $\alpha_1 = 32° 8' 33''$; il s'agit de tirer du tableau, par interpolation, les valeurs de $x''$ et de $\alpha$ correspondantes à la valeur $y'' = 5^m,0408$. Soit $n$ la fraction de l'intervalle de 2° à laquelle répond $y''_1$; il viendra pour déterminer $n$, en prenant les différences 1re et 2e de $y''$ à partir de $\alpha = 32°$,

$$0,0162 = n \,.\, 0,25565 + \frac{n(n-1)}{2}\, 0,00085,$$

d'où, en négligeant le dernier terme,

$$n = 0,0633:$$

cette valeur étant substituée dans le deuxième terme ne donne rien de sensible. On en déduit

$$x'' = 12,47425 + n \,.\, 0,39367 - \frac{n(n-1)}{2}\, 0,02736$$

| | |
|---|---|
| partie proportionnelle.... | + 0,02492 |
| 2e différence..... | + 0,00079 |
| $x'' =$ | 12,5000 |

En comparant cette valeur à $x''_1$, on voit que les erreurs accumulées de notre calcul ne s'élèvent qu'à $0^m,0084$.

Quant à l'angle $\alpha$, on a immédiatement $\alpha = 32° + n.2° = 32°7'36''$, ce qui donne une erreur de $57''$, quantité que l'on peut parfaitement négliger dans une question de ce genre. On ferait disparaître l'erreur qui affecte $x''_1$, soit en diminuant la demi-ouverture de $0^m,008$ dans la construction, soit en appliquant les nombres du tableau jusqu'à $x'' = 12^m,5084$; mais alors on produirait dans $y''_1$ une erreur de $0^m,005$ environ; c'est-à-dire qu'il faudrait élever la chaussée ou abaisser les naissances d'autant.

Le calcul des coordonnées $y''$ et $x''$ ayant été poussé jusqu'aux centièmes de millimètre, l'inexactitude des dernières décimales n'a pas dû s'élever par accumulation jusqu'au chiffre des millimètres. On peut regarder les écarts entre le calcul par quadratures et le calcul par les Tables, comme provenant de ce que l'intervalle $\Delta\alpha$ n'est point extrêmement petit, plutôt que des termes du troisième ordre négligés dans les formules générales.

Dans la pratique, on n'aura jamais besoin d'effectuer les calculs qui précèdent avec autant de figures que nous en avons employé, le nombre des déterminations successives de $e$ pourra être réduit, et les calculs du tableau précédent pourront quelquefois être remplacés par la construction graphique. Si nous n'avons pas abrégé les calculs, c'est que nous tenions à comparer les résultats des deux méthodes d'intégration. »

Les ingénieurs que n'effrayeront point les longs calculs présentés en dernier lieu, feront bien de les exécuter ou d'en surveiller l'exécution, qui ne peut exiger plus de un à deux jours de travail, suivant l'habileté du calculateur. Lorsqu'on songe à l'importance des constructions, aux accidents graves qui peuvent naître du défaut de bonnes proportions, ou de ce que l'ingénieur ne s'est pas bien rendu compte du jeu des forces en faisant son projet, on a de la peine à concevoir que l'on ne consacre pas aux calculs qui font la base fondamentale du projet, le quart ou la dixième partie des soins que l'on consacrera à l'enjolivement des dessins.

*Calcul des constantes nécessaires à l'exécution du tracé.*

ÉQUATIONS (XXVII).

| | |
|---|---|
| $\text{l. } Q^2 = 1{,}84269$ | $\text{l. } \frac{2}{3} = 9{,}82391$ |
| $\text{l. } 2 = 0{,}30103$ | $\text{l. } e^2 = 0{,}11980$ |
| $\text{l. } 2Q^2 = 2{,}14372$ | $\text{l. } \frac{2}{3} e^2 = 9{,}94371$ |
| $q = 11^m{,}9234 \ldots\ldots\ldots \text{ l. } q = 1{,}07640$ | $a = 0^m{,}07367 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ l.} = 8{,}86731$ |
| $q' = 11\ ,6767 \ldots\ldots\ldots \text{ l. } q' = 1{,}06732$ | $\text{l. } 2q = 1{,}37743$ |
| $\frac{1}{2} q = 5\ ,9617$ | $\widehat{E'_1 E' E''} = 0^\circ\ 10'\ 37'' \ldots \text{ l. tang} = 7{,}48988$ |

Au moyen de ces quantités, on pourrait effectuer le tracé en suivant les indications données n$^{os}$ 43 et 45. L'épure du profil de la voûte étant faite, soit en suivant ce procédé, soit à l'aide des coordonnées calculées au tableau précédent; si l'on trace sur la même épure l'arc de cercle tangent au sommet et passant par les naissances, on trouve que le plus grand écart entre l'intrados circulaire et celui de notre épure est de $0^m{,}14$ à peu près; cet écart se manifeste à une distance de la verticale qui passe par le sommet, égale à 0,7 environ de la demi-ouverture. Nous avons dit, en terminant la première partie du mémoire, que l'écart, assez faible en apparence, des deux intrados ne serait pas une raison pour substituer l'arc de cercle à celui que nous proposons.

La planche I présente le profil d'une demi-arche, et la planche II l'élévation d'un pont projeté sur les données du pont d'Iéna.

DEUXIÈME EXEMPLE.

*Arche à grande portée, de 5 mètres de flèche et près de 45 mètres d'ouverture.*

47. Soient données : $f = 5^m$; $g = 22^m{,}4957$; $Y_0 = 2^m{,}514$; $\mu_1 = 100^m{,}071$; $\varpi = 2440$ kil. La charge maximum $\mu_1$ répond à peu près à la limite $100^m$ de Navier, et au dixième de la résistance absolue de la roche d'Arcueil, eu égard à la différence des densités. (Les chiffres décimaux qui figurent dans ces données

proviennent, comme dans l'exemple précédent, de ce que nous avons voulu utiliser des calculs faits avec d'autres données.)

En suivant la marche indiquée n° 45, nous trouverons d'abord

$$h'' = 2{,}514, \qquad \frac{g}{f} = 4{,}49914, \qquad \frac{Y_0}{f} = 0{,}5028.$$

La Table I donne, relativement à la valeur de $\frac{g}{f}$:

| $\frac{Y_0}{f}$ | $\frac{Q^2}{f^2}$ | 1re différ. | 2e diff. |
|---|---|---|---|
| 0,5 | 6,8732 | + 1,0922 | — 68 |
| 0,6 | 7,9654 | + 1,0854 | |
| 0,7 | 9,0508 | | |

d'où :

| | | |
|---|---|---|
| pour 0,5 | | 6,8732 |
| partie proportionnelle | + | 306 |
| 2e différence | + | 1 |
| $\frac{Q^2}{f^2} =$ | | 6,9039 |

valeur approchée..... $Q^2 = 172{,}598$.

ÉQUATION (I).

$$\mu_1 - f = 95{,}071$$

$$3(\mu_1 - f) = 285{,}213 \ldots \text{l.} = 2{,}4552$$

$$2h'' = 5{,}028$$

$$f + 2h'' = 10{,}028$$

$$f(f + 2h'') = 50{,}140 \ldots \text{l.} = 1{,}7002$$

$$\frac{f(f+2h'')}{3(\mu_1 - f)} = 0{,}1758 \ldots \text{l.} = 9{,}2450$$

$$\mu_0 = 94{,}8952 \ldots \text{l.} = 1{,}97724$$

ÉQUATION (II).

$$\text{l. } Q^2 = 2{,}23704$$

$$\mu_0 - h'' = 92{,}381 \ldots\ldots \text{l.} = 1{,}96558$$

$$\text{val. app.} \ldots \text{l. } e = 0{,}27146$$

$$\text{l. } \frac{2}{3} = 9{,}82391$$

$$\frac{2}{3} e = 1{,}246 \ldots\ldots \text{l.} = 0{,}09537$$

$$\text{dénom.} = 93{,}627 \ldots\ldots \text{l.} = 1{,}97140$$

$$\text{l. } e = 0{,}26564$$

Pour corriger la valeur de $Q^2$, nous aurons recours à la Table II qui donne, avec les valeurs précédentes de $\frac{g}{f}$ et $\frac{Y_0}{f}$,

$$\frac{\delta(Q^2)}{e^2} = 0{,}3394 \ldots\ldots\ldots \quad \text{l.} = 9{,}53071$$

$$\text{l. } e^2 = 0{,}53128$$

d'où $\delta(Q^2) = 1{,}153 \ldots\ldots\ldots \quad \text{l.} = 0{,}06199$

valeur corrigée..... $Q^2 = 173{,}751 \ldots\ldots \quad \text{l. } Q^2 = 2{,}23993$

ÉQUATION (V).

$$\text{l. } 6 = 0{,}77815$$

$$\text{l. } 6Q^2 = 3{,}01808$$

$$\text{l. } \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} = 7{,}5132$$

$Y_0 = 2{,}5140 \ldots\ldots \quad \text{l. } Y_0 = 0{,}4004$

$-\frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} Y_0 = -0{,}0082 \ldots\ldots\ldots \quad \text{l.} = 7{,}9136 -$

valeur corrigée..... $h'' = 2{,}5058 \ldots\ldots \quad \text{l. } h'' = 0{,}39895$

A l'aide de cette valeur, nous allons calculer une autre valeur de $e$ plus exacte.

ÉQUATION (II).

$$\mu_0 - h'' = 92{,}3894$$

(à posteriori)..... $\frac{2}{3} e = 1{,}2372 \qquad \text{l. } Q^2 = 2{,}23993$

dénom..... $= 93{,}6266 \ldots\ldots\ldots \quad \text{l.} = 1{,}97140$

valeur corrigée..... $e = 1{,}8558 \ldots\ldots \quad \text{l. } e = 0{,}26853$

ÉQUATION (VI).

$$\text{l. } 2 = 0{,}30103$$

$$\text{l. } \mu_0 = 1{,}97724$$

$q^2 = 352{,}209 \ldots\ldots \quad \text{l. } q^2 = 2{,}54680$

$$\text{l. } e^2 = 0{,}53706$$

La comparaison de $h''$ et $e$ donne $h = 0^m,65$. Or la hauteur de la charge $h$ peut être réduite à peu près comme il suit :

| MATÉRIAUX EMPLOYÉS. | ÉPAISSEUR. | DENSITÉ. | HAUTEUR RÉDUITE à la densité 2,44 des voussoirs. |
|---|---|---|---|
| | m | | m |
| 1° Béton..... | 0,15 | 1,97 | 0,121 |
| 2° Cailloux et gravier.. | 0,20 | 1,9 | 0,273 |
| 3° Sable..... | 0,15 | 1,9 | |
| 4° Pavé..... | 0,25 | 2,5 | 0,256 |
| Épaisseur totale..... | 0,75 | Épaisseur réduite, $h = 0,65$ | |

La solution est donc réalisable. Dans ce cas, les ordonnées sont rapportées à un plan horizontal situé à $0^m,10$ au-dessous du niveau du pavé.

*Calcul des poussées, etc.*

ÉQUATIONS (XIV).

CALCUL DE $y''_1$.

$f + h'' = 7,5058$..... l. $= 0,87540$

$f + 2h'' = 10,012$ ... l. $= 1,00052$

somme $= 1,87592$

l. $q^2 = 2,54680$

$\frac{(f+h'')(f+2h'')}{q^2} = 0,21336$ ... l. $= 9,32912$

$1 -$ id. $= 0,78664$ ... l. $= 9,89578$

l. $\frac{1}{3}f = 0,22185$

l. $\frac{e^2}{q^2} = 7,99026$

3e terme $= 0,01282$.... l. $= 8,10789$

$y''_1 = 7,49298$.... l. $= 0,87465$

CALCUL DE $\alpha_1$.

$y_1''^2 = 56,144$..... l. $= 1,74930$

$h''^2 = 6,279$..... l. $= 0,79789$

$y_1''^2 - h''^2 = 49,865$..... l. $= 1,69780$

$4Q^2 = 695,004$..... l. $= 2,84199$

diff. $= 8,85581$

$\frac{1}{2}\alpha'_1 = 15° 32' 13''$..... l. sin $= 9,42791$

$\alpha'_1 = 31\ \ 4\ \ 26$ ..... l. sin $= 9,7128$

l. $\frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} = 7,5132$

$\alpha_1 - \alpha'_1 = 0\ \ 5\ \ 47$ ..... l. sin $= 7,2260$

$\alpha_1 = 31° 10' 13''$..... l. sin $\alpha_1 = 9,71398$

l. cos $\alpha_1 = 9,93229$

ÉQUATIONS (XV).

$$\text{l. } 3 = 0{,}47712$$

$$\text{l. } \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = 7{,}51314$$

$$\text{l. } 2\delta_1 = 8{,}38854$$

$$2\delta_1 \sin\alpha_1 = 0{,}01266 \ldots \quad \text{l.} = 8{,}10252$$

$$g = 22{,}4957$$

$$x''_1 = 22{,}50836$$

ÉQUATIONS (XIX).

$$\text{l. } \frac{1}{2} e = 9{,}96750$$

$$\frac{1}{2} e \sin\alpha_1 = 0{,}48026 \ldots \quad \text{l.} = 9{,}68148$$

$$\frac{1}{2} e \cos\alpha_1 = 0{,}79394 \ldots \quad \text{l.} = 9{,}89979$$

$$x_1 = 22{,}9886$$

$$y_1 = 6{,}6990$$

ÉQUATIONS (XX).

$$y'_0 = 0{,}65 \ldots \quad \text{l.} = 9{,}81291$$

$$y'_1 = 5{,}9051 \ldots \quad \text{l.} = 0{,}77123$$

ÉQUATION (XVIII).

$$\text{l. } \mu_1 = 2{,}00031$$

$$\text{l. } e\,\mu_1 = 2{,}26884$$

$$\text{l. } \varpi = 3{,}38739$$

$$\frac{T_1}{\lambda} = 453138 \text{ kil} \ldots \quad \text{l. } \frac{T_1}{\lambda} = 5{,}65623$$

$$\frac{T_1}{\lambda} \sin\alpha_1 = 234536 \ldots \quad \text{l.} = 5{,}37021$$

$$\frac{T_1}{\lambda} \cos\alpha_1 = 387721 \ldots \quad \text{l.} = 5{,}58852$$

ÉQUATION (XXI).

$$y_1'^2 = 34{,}8698 \ldots \quad \text{l.} = 1{,}54245$$

$$y_0'^2 = 0{,}4225 \ldots \quad \text{l.} = 9{,}62582$$

$$y_1'^2 - y_0'^2 = 34{,}4473$$

$$\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2) = 17{,}2236 \ldots \quad \text{l.} = 1{,}23612$$

$$\text{l. } \varpi = 3{,}38739$$

$$\frac{U}{\lambda} = 42025 \text{ kil} \ldots \quad \text{l.} = 4{,}62351$$

ÉQUATION (XXII).

$$y_1'^3 = 205{,}911 \ldots \quad \text{l.} = 2{,}31368$$

$$y_0'^3 = 0{,}275 \ldots \quad \text{l.} = 9{,}43873$$

$$y_1'^3 - y_0'^3 = 205{,}636$$

$$\frac{1}{3}(y_1'^3 - y_0'^3) = 68{,}545 \ldots \quad \text{l.} = 1{,}83598$$

$$a = 3{,}9798 \ldots \quad \text{l.} = 0{,}59986$$

ÉQUATION (XXIII).

$$\frac{V}{\lambda} = 96^{m\text{-}s}{,}127 \ldots \quad \text{l.} = 1{,}98282$$

ÉQUATION (XXIII *bis*). *Vérification.*

$$\frac{T_1}{\lambda} \cos\alpha_1 + \frac{U}{\lambda} = 429746 \text{ kil} \ldots \quad \text{l.} = 5{,}63321$$

$$\text{l. } e\,\mu_0 = 2{,}24577$$

$$\text{l. } \varpi\, e\,\mu_0 = 5{,}63316$$

$$\text{erreur} = 5$$

Nous renverrons, pour ce qui concerne l'usage des quantités que nous venons d'obtenir, à ce qui a déjà été dit dans l'exemple du numéro précédent, à l'égard de quantités analogues.

*Calcul des coordonnées, inclinaisons des joints, rayons de courbure, épaisseurs.*

Le tableau ci-après offre les détails des calculs effectués en suivant la marche qui a été indiquée dans l'exemple relatif au pont d'Iéna : nous nous bornerons à comparer les valeurs de $x''_1$ et $\alpha_1$ déduites du tableau par interpolation, à celles qui ont été déduites des Tables. Désignant toujours par $n$ la fraction de l'intervalle de 2° à laquelle répond $y'' = 7^m,49298$, nous avons pour déterminer $n$,

$$0,23917 = n \,.\, 0,41655 + \frac{n(n-1)}{2} \,.\, 0,00066,$$

d'où l'on tire, en négligeant le dernier terme,

$$n = 0,57417,$$

et, en ayant égard à ce dernier terme,

$$n = 0,57435.$$

Avec cette valeur et les différences de $x''$ relatives à $\alpha = 30°$, il vient

$$x'' = 22,08359 + n \,.\, 0,69327 - \frac{n(n-1)}{2} \,.\, 0,05083 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} \,.\, 0,00434$$

| | | |
|---|---|---|
| 1er terme..... | | 22,08359 |
| partie proportionnelle..... | + | 0,39818 |
| 2e différence..... | + | 620 |
| 3e différence..... | + | 25 |
| d'où | $x'' =$ | 22,48822 |
| or nous avons trouvé | $x''_1 =$ | 22,50836 |
| l'erreur est donc | | 0,0201 |

quantité moindre que la millième partie de la demi-ouverture.

ARCHES INCOMPLÈTES,

PROJET D'ARCHE À GRANDE PORTÉE, DE 44$^m$,991 D'OUVERTURE ET 5$^m$,000 DE FLÈCHE. —

**FORMULES.**

$$\rho'' = \frac{Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha}{y''},$$

$$\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'' = \rho''\frac{y'' + \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha}{y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha},$$

$$\Delta y'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'')\sin(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha,$$

$$\Delta x'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'')\cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha.$$

*Pour Vérification :*

$$\rho''_m + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''_m - \tfrac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1}) = \text{erreur}.$$

---

$$y' = y'' - e\cos\alpha,$$

$$x' = x'' + e\sin\alpha,$$

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'',$$

$$\varepsilon = e + 2\delta,$$

$$Y = y'' + 2\delta\cos\alpha,$$

$$X = x'' - 2\delta\sin\alpha.$$

---

**CONSTANTES.**

Soit $\Delta\alpha = 2°$.

$\Delta\alpha = 0{,}0349066$

l. $\Delta\alpha = 8{,}54291$

$Q^2 = 173{,}751$

l. $e^2 = 0{,}53706$

l. $3 = 0{,}47712$

l. $\frac{1}{3}e^2 = 0{,}05994$

$k'' = y''_0 = 2^m{,}50580$

$x''_0 = 0$

l. $\frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = 7{,}51314$

| $\alpha$ | 0° | 2° | 4° | 6° | 8° | 10° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| l. sin $\alpha$ | $\overline{\infty}$ | 8,54282 | 8,84358 | 9,01923 | 9,14356 | 9,23967 |
| l. cos $\alpha$ | 0 | 9,99974 | 9,99894 | 9,99761 | 9,99575 | 9,99335 |
| l. sin $(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$ | 8,24186 | 8,71880 | 8,94030 | 9,08589 | 9,19433 | 9,28060 |
| l. cos $(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$ | 9,99993 | 9,99940 | 9,99834 | 9,99676 | 9,99462 | 9,99195 |
| l. sin $(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 6,78477 | 7,26171 | 7,48321 | 7,62880 | 7,73724 | 7,82351 |
| l. cos $(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 8,54284 | 8,54231 | 8,54125 | 8,53967 | 8,53753 | 8,53486 |
| l. $\frac{1}{3}e^2\cos\alpha$ | 0,0599 | 0,0597 | 0,0589 | 0,0576 | 0,0557 | 0,0533 |
| $y''$ | 2,50580 | 2,54742 | 2,66840 | 2,85866 | 3,10536 | 3,39596 |
| $x''$ | 0 | 2,38440 | 4,69285 | 6,86745 | 8,87668 | 10,71144 |
| $\frac{1}{3}e^2\cos\alpha$ | 1,148 | 1,147 | 1,145 | 1,142 | 1,137 | 1,131 |
| $Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha$ | 172,603 | 172,604 | 172,606 | 172,609 | 172,614 | 172,620 |
| l. $[Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha]$ | 2,23705 | 2,23705 | 2,23705 | 2,23706 | 2,23708 | 2,23709 |
| l. $y''$ | 0,39895 | 0,40610 | 0,42625 | 0,45616 | 0,49211 | 0,53096 |
| l. $\rho''$ | 1,83810 | 1,83095 | 1,81080 | 1,78090 | 1,74497 | 1,70613 |
| l. $\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 8,62287 | 9,09266 | 9,29401 | 9,40970 | 9,48221 | 9,52964 |
| $\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 0,04196 | 0,12378 | 0,19679 | 0,25686 | 0,30354 | 0,33856 |
| $y'' + \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 2,54776 | 2,67120 | 2,86519 | 3,11552 | 3,40890 | 3,73452 |
| $\frac{1}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 0,02098 | 0,06189 | 0,09840 | 0,12843 | 0,15177 | 0,16928 |
| $y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 2,56874 | 2,73309 | 2,96359 | 3,24395 | 3,56067 | 3,90380 |
| l. $[y'' + \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$ | 0,40616 | 0,42671 | 0,45715 | 0,49353 | 0,53261 | 0,57224 |
| l. $[y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$ | 0,40972 | 0,43665 | 0,47182 | 0,51107 | 0,55153 | 0,59149 |
| l. $[\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'']$ | 1,83454 | 1,82101 | 1,79613 | 1,76336 | 1,72605 | 1,68689 |
| l. $\Delta y''$ | 8,61931 | 9,08272 | 9,27934 | 9,39216 | 9,46329 | 9,51039 |
| l. $\Delta x''$ | 0,37738 | 0,36332 | 0,33738 | 0,30303 | 0,26358 | 0,22170 |
| $\Delta y''$ | 0,04162 | 0,12098 | 0,19026 | 0,24670 | 0,29060 | 0,32388 |
| $\Delta x''$ | 2,38440 | 2,30845 | 2,17460 | 2,00923 | 1,83476 | 1,66625 |
| $\rho''$ | 68,881 | 67,756 | 64,684 | 60,381 | 55,587 | 50,831 |
| Vérification $\rho''_m + \rho''_{m+1}$ | 136,637 | 132,440 | 125,065 | 115,968 | 106,418 | 97,239 |
| Vérification $\frac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1})$ | 68,318 | 66,220 | 62,532 | 57,984 | 53,209 | 48,619 |
| Vérification $\rho''_m + \frac{1}{2}\Delta\rho''_m$ | 68,319 | 66,223 | 62,536 | 57,991 | 53,217 | 48,627 |
| Vérification erreur | 1 | 3 | 4 | 7 | 8 | 8 |
| l. $e\sin\alpha$ | $\overline{\infty}$ | 8,81135 | 9,11211 | 9,28776 | 9,41209 | 9,50832 |
| l. $e\cos\alpha$ | 0,26853 | 0,26827 | 0,26747 | 0,26614 | 0,26428 | 0,26188 |
| $e\sin\alpha$ | 0 | 0,06477 | 0,12945 | 0,19398 | 0,25828 | 0,32212 |
| $e\cos\alpha$ | 1,85580 | 1,85469 | 1,85127 | 1,84560 | 1,83772 | 1,82766 |
| $y'$ | 0,6500 | 0,6927 | 0,8171 | 1,0131 | 1,2676 | 1,5634 |
| $x'$ | 0 | 2,4492 | 4,8223 | 7,0614 | 9,1350 | 11,0337 |
| l. $2\delta$ | 7,9121 | 7,9192 | 7,9394 | 7,9693 | 8,0052 | 8,0441 |
| l. $2\delta\sin\alpha$ | $\overline{\infty}$ | 6,4620 | 6,7830 | 6,9885 | 7,1488 | 7,2838 |
| l. $2\delta\cos\alpha$ | 7,9121 | 7,9189 | 7,9383 | 7,9669 | 8,0009 | 8,0374 |
| $2\delta$ | 0,00817 | 0,00830 | 0,00870 | 0,00932 | 0,01012 | 0,0110 |
| $2\delta\sin\alpha$ | 0 | 0,00029 | 0,00061 | 0,00097 | 0,00141 | 0,0019 |
| $2\delta\cos\alpha$ | 0,00817 | 0,00830 | 0,00868 | 0,00927 | 0,01002 | 0,010 |
| $\varepsilon$ | 1,8640 | 1,8641 | 1,8645 | 1,8651 | 1,8659 | 1,866 |
| Y | 2,5140 | 2,5557 | 2,6771 | 2,8679 | 3,1154 | 3,40 |
| X | 0 | 2,3841 | 4,6922 | 6,8665 | 8,8753 | 10,70 |

DITES *EN ARC DE CERCLE.*

CALCUL DES COORDONNÉES, INCLINAISONS DES PLANS DE JOINT, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS.

| 12° | 14° | 16° | 18° | 20° | 22° | 24° | 26° | 28° | 30° | 32° | 34° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9,31788 | 9,38368 | 9,44034 | 9,48998 | 9,53405 | 9,57358 | 9,60931 | 9,64184 | 9,67161 | 9,69897 | 9,72421 | 9,74756 |
| 9,99040 | 9,98690 | 9,98284 | 9,97821 | 9,97299 | 9,96717 | 9,96073 | 9,95366 | 9,94593 | 9,93753 | 9,92842 | 9,91857 |
| 9,35209 | 9,41300 | 9,46594 | 9,51264 | 9,55433 | 9,59188 | 9,62595 | 9,65705 | 9,68557 | 9,71184 | 9,73611 | 9,75859 |
| 9,98872 | 9,98494 | 9,98060 | 9,97567 | 9,97015 | 9,96403 | 9,95728 | 9,94988 | 9,94182 | 9,93307 | 9,92359 | 9,91336 |
| 7,89500 | 7,95591 | 8,00885 | 8,05555 | 8,09724 | 8,13479 | 8,16886 | 8,19996 | 8,22848 | 8,25475 | 8,27902 | 8,30150 |
| 8,53163 | 8,52785 | 8,52351 | 8,51858 | 8,51306 | 8,50694 | 8,50019 | 8,49279 | 8,48473 | 8,47598 | 8,46650 | 8,45627 |
| 0,0503 | 0,0468 | 0,0428 | 0,0381 | 0,0329 | 0,0271 | 0,0207 | 0,0136 | 0,0059 | 9,9975 | 9,9884 | 9,9785 |
| 3,71984 | 4,06868 | 4,43621 | 4,81772 | 5,20973 | 5,60960 | 6,01535 | 6,42540 | 6,83855 | 7,25381 | 7,67036 | 8,08757 |
| 12,37769 | 13,88867 | 15,26027 | 16,50814 | 17,64663 | 18,68832 | 19,64422 | 20,52359 | 21,33444 | 22,08359 | 22,77686 | 23,41930 |
| 1,123 | 1,114 | 1,104 | 1,092 | 1,079 | 1,064 | 1,049 | 1,032 | 1,014 | 0,994 | 0,974 | 0,952 |
| 172,628 | 172,637 | 172,647 | 172,659 | 172,672 | 172,687 | 172,702 | 172,719 | 172,737 | 172,757 | 172,777 | 172,799 |
| 2,23711 | 2,23713 | 2,23716 | 2,23719 | 2,23722 | 2,23726 | 2,23730 | 2,23734 | 2,23738 | 2,23743 | 2,23748 | 2,23754 |
| 0,57052 | 0,60945 | 0,64701 | 0,68284 | 0,71682 | 0,74893 | 0,77926 | 0,80790 | 0,83496 | 0,86057 | 0,88482 | 0,90782 |
| 1,66659 | 1,62768 | 1,59015 | 1,55435 | 1,52040 | 1,48833 | 1,45804 | 1,42944 | 1,40242 | 1,37686 | 1,35266 | 1,32972 |
| 9,56159 | 9,58359 | 9,59900 | 9,60990 | 9,61764 | 9,62312 | 9,62690 | 9,62940 | 9,63090 | 9,63161 | 9,63168 | 9,63122 |
| 0,36441 | 0,38335 | 0,39719 | 0,40729 | 0,41461 | 0,41988 | 0,42355 | 0,42599 | 0,42746 | 0,42817 | 0,42823 | 0,42778 |
| 4,08425 | 4,45203 | 4,83340 | 5,22501 | 5,62434 | 6,02948 | 6,43890 | 6,85139 | 7,26601 | 7,68198 | 8,09859 | 8,51535 |
| 0,18221 | 0,19167 | 0,19860 | 0,20364 | 0,20730 | 0,20994 | 0,21177 | 0,21299 | 0,21373 | 0,21408 | 0,21412 | 0,21389 |
| 4,26646 | 4,64370 | 5,03200 | 5,42865 | 5,83164 | 6,23942 | 6,65067 | 7,06438 | 7,47974 | 7,89606 | 8,31271 | 8,72924 |
| 0,61111 | 0,64856 | 0,68425 | 0,71800 | 0,75007 | 0,78028 | 0,80881 | 0,83578 | 0,86130 | 0,88547 | 0,90841 | 0,93020 |
| 0,63007 | 0,66686 | 0,70174 | 0,73469 | 0,76579 | 0,79514 | 0,82286 | 0,84907 | 0,87388 | 0,89741 | 0,91974 | 0,94098 |
| 1,64763 | 1,60938 | 1,57266 | 1,53775 | 1,50468 | 1,47347 | 1,44398 | 1,41615 | 1,38984 | 1,36492 | 1,34133 | 1,31894 |
| 9,54263 | 9,56529 | 9,58151 | 9,59330 | 9,60192 | 9,60826 | 9,61284 | 9,61611 | 9,61832 | 9,61967 | 9,62035 | 9,62044 |
| 0,17926 | 0,13723 | 0,09617 | 0,05633 | 0,01774 | 9,98041 | 9,94417 | 9,90894 | 9,87457 | 9,84090 | 9,80783 | 9,77521 |
| 0,34884 | 0,36753 | 0,38151 | 0,39201 | 0,39987 | 0,40575 | 0,41005 | 0,41315 | 0,41526 | 0,41655 | 0,41721 | 0,41722 |
| 1,51098 | 1,37160 | 1,24787 | 1,13849 | 1,04169 | 0,95590 | 0,87938 | 0,81085 | 0,74915 | 0,69327 | 0,64244 | 0,59595 |
| 46,408 | 42,431 | 38,918 | 35,839 | 33,144 | 30,784 | 28,710 | 26,881 | 25,259 | 23,816 | 22,525 | 21,366 |
| 88,839 | 81,349 | 74,757 | 68,983 | 63,928 | 59,494 | 55,591 | 52,140 | 49,075 | 46,341 | 43,891 | » |
| 44,419 | 40,674 | 37,378 | 34,492 | 31,964 | 29,747 | 27,795 | 26,070 | 24,538 | 23,170 | 21,945 | » |
| 44,425 | 40,680 | 37,382 | 34,495 | 31,966 | 29,749 | 27,796 | 26,071 | 24,538 | 23,170 | 21,945 | » |
| 6 | 6 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | » |
| 9,58641 | 9,65221 | 9,70887 | 9,75851 | 9,80258 | 9,84211 | 9,87784 | 9,91037 | 9,94014 | 9,96750 | 9,99274 | 0,01609 |
| 0,25893 | 0,25543 | 0,25137 | 0,24674 | 0,24152 | 0,23570 | 0,22926 | 0,22219 | 0,21446 | 0,20606 | 0,19695 | 0,18710 |
| 0,38584 | 0,44896 | 0,51153 | 0,57346 | 0,63471 | 0,69520 | 0,75482 | 0,81352 | 0,87124 | 0,92790 | 0,98342 | 1,03775 |
| 1,81522 | 1,80067 | 1,78390 | 1,76498 | 1,74390 | 1,72068 | 1,69535 | 1,66798 | 1,63855 | 1,60716 | 1,57380 | 1,53850 |
| 1,9046 | 2,2680 | 2,6523 | 3,0527 | 3,4658 | 3,8889 | 4,3200 | 4,7574 | 5,2000 | 5,6466 | 6,0966 | 6,5491 |
| 12,7635 | 14,3376 | 15,7718 | 17,0816 | 18,2813 | 19,3835 | 20,3990 | 21,3371 | 22,2057 | 23,0115 | 23,7603 | 24,4572 |
| 8,0837 | 8,1226 | 8,1601 | 8,1960 | 8,2300 | 8,2621 | 8,2924 | 8,3210 | 8,3481 | 8,3737 | 8,3980 | 8,4210 |
| 7,4016 | 7,5063 | 7,6004 | 7,6860 | 7,7640 | 7,8357 | 7,9017 | 7,9628 | 8,0197 | 8,0727 | 8,1222 | 8,1686 |
| 8,0741 | 8,1095 | 8,1429 | 8,1742 | 8,2030 | 8,2293 | 8,2531 | 8,2747 | 8,2940 | 8,3112 | 8,3264 | 8,3396 |
| 0,01213 | 0,01326 | 0,01446 | 0,01571 | 0,01698 | 0,01829 | 0,01961 | 0,02094 | 0,02229 | 0,02364 | 0,02500 | 0,02636 |
| 0,00252 | 0,00321 | 0,00399 | 0,00485 | 0,00581 | 0,00685 | 0,00797 | 0,00918 | 0,01046 | 0,01182 | 0,01325 | 0,01474 |
| 0,01186 | 0,01287 | 0,01390 | 0,01493 | 0,01596 | 0,01695 | 0,01791 | 0,01882 | 0,01968 | 0,02047 | 0,02120 | 0,02186 |
| 1,8679 | 1,8691 | 1,8703 | 1,8715 | 1,8728 | 1,8741 | 1,8754 | 1,8767 | 1,8781 | 1,8794 | 1,8808 | 1,8822 |
| 3,7317 | 4,0815 | 4,4501 | 4,8326 | 5,2257 | 5,6266 | 6,0332 | 6,4442 | 6,8582 | 7,2743 | 7,6916 | 8,1094 |
| 12,3752 | 13,8855 | 15,2563 | 16,5033 | 17,6408 | 18,6815 | 19,6363 | 20,5144 | 21,3240 | 22,0718 | 22,7637 | 23,4046 |

Quant à la valeur de $\alpha$, elle est $30° + n \,.\, 2° = 31° \; 8' \; 55''$ au lieu de $31° \; 10' \; 13''$, d'où il résulte que l'erreur sur $\alpha_1$ est de $1' \; 18''$, quantité négligeable au degré d'approximation que nous nous sommes imposé.

Les erreurs sur $x''_1$ et $\alpha_1$ auraient été évidemment réduites en prenant $\Delta\alpha$ égal à $1°$. Si l'on veut réaliser l'ouverture proposée, il suffira de faire croître $y''_1$ de la quantité $0^m,0201 \tang \alpha_1 = 0^m,0122$, et il en résultera la nécessité d'élever la chaussée ou d'abaisser les naissances de 1 centimètre environ.

*Calcul des constantes nécessaires à l'exécution du tracé.*

ÉQUATIONS (XXVII).

$$\begin{aligned}
\text{l. } Q^2 &= 2{,}23993 \\
\text{l. } 2 &= 0{,}30103 \\
\hline
\text{l. } 2Q^2 &= 2{,}54096 \\
q = 18^m{,}7672 \ldots\ldots \quad \text{l. } q &= 1{,}27340 \\
\hline
q' = 18\ {,}5166 \ldots\ldots \quad \text{l. } q' &= 1{,}26756 \\
\hline
\frac{1}{2} q = \ \ 9\ {,}3836 &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{l. } \frac{2}{3} &= 9{,}82391 \\
\text{l. } e^2 &= 0{,}53706 \\
\hline
\text{l. } \frac{2}{3} e^2 &= 0{,}36097 \\
a = 0^m{,}12234 \ldots \quad \text{l. } a &= 9{,}08757 \\
\text{l. } 2q &= 1{,}57443 \\
\hline
\widehat{E_1'E'E''} = 0°\,11'\,12'' \ldots \quad \text{l. tang} &= 7{,}51314
\end{aligned}$$

Le tracé de l'intrados comparé à l'arc de cercle tangent au sommet et passant par les naissances donne, entre ces courbes, un écart qui s'élève jusqu'à $0^m,30$ environ, et qui se présente vers les 0,7 de la distance de l'axe de la voûte aux naissances. C'est à cette comparaison des deux intrados que s'applique la discussion du n° 32.

On peut voir, planches I et II, le profil de l'arche que nous venons d'étudier et une élévation de pont construite sur ce profil. On a figuré, planche II, un mode de disposition de l'appareil des têtes qui semblerait se prêter à la réalisation approximative des actions normales de la charge sur l'extrados de la voûte. Le sens vertical ou horizontal du lit de carrière serait indifférent, dans cette disposition, si l'on pouvait négliger l'effet des surcharges

accidentelles, puisque les pressions horizontales et verticales en un point donné du massif seraient égales, conformément aux conséquences de l'hypothèse de la fluidité. Nous n'osons pas insister pour que l'on réalise la disposition indiquée dans la figure; nous avons voulu seulement donner une idée de l'aspect que présenterait un semblable mode d'appareiller les parements extérieurs.

### *ARCHES COMPLÈTES* OU *EN ANSE DE PANIER.*

*Exemple d'un projet d'arche à grande portée, de 60m,070 d'ouverture.*

48. Il nous a semblé bon de présenter un exemple des grandes dimensions que nos formules permettent de donner aux arches de pont, sans sortir des conditions de grande stabilité, ni exposer les voussoirs à des pressions trop considérables.

L'arche en pierre de la plus grande dimension que l'on connaisse est celle du pont de Vieille-Brioude (sur l'Allier). Cette arche a 54m,20 d'ouverture et 21 mètres de flèche; le projet dont nous nous occupons présente encore plus de hardiesse, comme on va le voir.

Soient données en premier lieu :

| | | |
|---|---|---|
| Demi-ouverture..... | $g = 30^m,035$... | l. $g = 1,47763$ |
| Ordonnée des naissances.... | $Y_1 = 18\ ,7480$.. | l. $Y_1 = 1,27295$ |
| d'où | $\frac{g}{Y_1} = 1,60207$... | l. $= 0,20468$ |

Si l'on cherche ce nombre dans la Table III, colonne marquée $\frac{g}{Y_1}$, on trouvera, par interpolation, qu'il répond à

| | | |
|---|---|---|
| | $\frac{f}{Y_1} = 0,865903$ ... | l. $= 9,93747$ |
| d'où | $f = 16,2338$ ..... | l. $= 1,21042$ |

puis, à cause de $y'_1 = Y_1$,

| | | |
|---|---|---|
| | $y'_1 - f = 2,5142$ ..... | l. $= 0,40040$ |

On voit ainsi que la somme de l'épaisseur à la clef et de la surcharge ne s'élève qu'à $2^m,5142$ : il convient donc d'employer des matériaux résistants, pour ne pas avoir une surcharge trop faible. Supposons que les matériaux dont on dispose soient capables de résister à la charge permanente représentée par

$$\mu_1 = 112^m,326 \ldots \quad \text{l.}\,\mu_1 = 2,05048$$

et soit

$$\varpi = 2440 \text{ kil} \ldots \quad \text{l.}\,\varpi = 3,38739;$$

$\mu_1$ ne sera qu'environ le $\frac{1}{16}$ de la hauteur 1803 mètres qui répond à la rupture du liais de Bagneux (voir le tableau du n° 44). Si l'on s'en tient aux prescriptions rapportées par M. Poncelet, on ne courra aucun risque en adoptant le chiffre ci-dessus. L'emploi de la charge $\mu_1$ que nous proposons aurait contre lui le dire de Navier, qui limite les charges à 100 mètres dans les arches de pont; mais nous devons penser que cet ingénieur n'a pas prétendu les fixer ainsi à $\frac{1}{10}$ près : il avait en vue les constructions telles que tout le monde les pratiquait à son époque, constructions dans lesquelles la stabilité s'éloigne plus ou moins de la grande stabilité que nous avons assignée aux nôtres.

Calculons $\mu_0$ et $e$ :

ÉQUATIONS (VIII).

$$2y''_1 - f = 21,2622 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 1,32761$$
$$\text{l.}\,f(2y''_1 - f) = 2,53803$$
$$\mu_1 - f = 96,092$$
$$3(\mu_1 - f) = \boxed{288,276} \ldots\ldots \quad \text{l.} = 2,45981$$
$$\frac{f(2y''_1 - f)}{3(\mu_1 - f)} = 1,197 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 0,07822$$
$$\mu_0 = 94,895 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 1,97724$$
$$\mu_0 - y''_1 + f = 92,381 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 1,96558$$

$$\text{l.}\,\frac{1}{2}f(2y''_1 - f) = 2,23700$$
$$\text{l.}(\mu_0 - y''_1 + f) = 1,96558$$
$$\text{val. appr.} \ldots \quad \text{l.}\,e = 0,27142$$
$$\text{l.}\,3 = 0,47712$$
$$\frac{1}{3}e = 0,6227 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 9,79430$$
$$\text{dénominat.} = 93,0037 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 1,96850$$
$$2^e \text{ val. appr.} \ldots \quad \text{l.}\,e = 0,26850$$
$$\frac{1}{3}e = 0,6185 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 9,79138$$

ÉQUATIONS (IX).

$$y_1'' - f = 2{,}5142 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 0{,}40040$$

$$\text{l.}\,\frac{y''_1 - f}{f(2y''_1 - f)} = 7{,}86237$$

$$\text{l.}\,\frac{1}{3}e^2 = 0{,}05988$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{y''_1 - f}{f(2y''_1 - f)}\,e^2 = 0{,}0084 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 7{,}92225$$

$$h'' = 2{,}5058 \ldots\ldots \quad \text{l.}\,h'' = 0{,}39895$$

$$e = 1{,}8558 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$h = 0{,}6500$$

*Calcul plus précis de e*, ÉQUATION (IX *bis*).

$$y_1''^2 = 351{,}488 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 2{,}54591$$

$$k''^2 = 6{,}279 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 0{,}79789$$

$$y_1''^2 - k''^2 = 345{,}209$$

$$\frac{1}{2}(y_1''^2 - k''^2) = 172{,}604 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 2{,}23705$$

$$\mu_0 - k'' = 92{,}389$$

$$\text{dénomin.} \ldots = 93{,}008 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 1{,}96852$$

$$\text{val. corr.} \ldots\ e = 1{,}8558\,(^*) \ldots \quad \text{l.}\,e = 0{,}26853$$

ÉQUATIONS (XII).

$$\frac{1}{2}q^2 = 176{,}105 \ldots \quad \text{l.}\,e\mu_0 = 2{,}24577$$

$$\text{l.}\,2 = 0{,}30103$$

$$q^2 = \boxed{352{,}209} \ldots \quad \text{l.}\,q^2 = 2{,}54680$$

$$-h''e = -4{,}650 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 0{,}66748$$

$$\text{l.}\,e^2 = 0{,}53706$$

$$\text{l.}\,\frac{2}{3} = 9{,}82391$$

$$+\frac{2}{3}e^2 = +2{,}296 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 0{,}36097$$

$$Q^2 = 173{,}751 \ldots \quad \text{l.}\,Q^2 = 2{,}23993$$

On peut remarquer actuellement que les constantes $Q^2$, $e$, $\mu_0$, $q^2$ et $h''$ sont précisément les mêmes que dans l'exemple précédent. Nous avons choisi nos données de manière à retrouver ces constantes : en cela nous nous sommes proposé d'utiliser les calculs relatifs aux coordonnées, rayons de courbure, etc., présentés dans cet exemple.

(*) Si l'on voulait se servir de cette valeur de $e$ pour corriger la solution, à l'aide de la Table IV, on trouverait $\frac{Y_1\,\delta f}{e^2} < 0{,}0001$, d'où $\delta f < 0^m{,}00002$.

Sans cette circonstance, nous aurions pu nous dispenser d'effectuer le dernier calcul de $e$, car le logarithme de cette quantité, obtenu en dernier lieu, ne diffère de celui obtenu précédemment que de trois unités du dernier ordre.

En se reportant à la valeur de $e$, on voit comment le bon emploi des matériaux conduit, malgré des dimensions si considérables, à une épaisseur à la clef qui n'a rien d'exagéré, et que probablement tout ingénieur, en l'absence d'une théorie aussi approchée que la nôtre, eût augmentée notablement. C'est du moins ce que l'on peut induire de l'examen des constructions existantes, où l'on trouve des épaisseurs de voûte de 2 mètres à $2^m,25$ pour des portées incomparablement moindres que 60 mètres.

Si, au lieu de se donner $\mu_1$, on se fût donné $h$, on aurait calculé $e$ et $\mu_1$ par les équations (x) et (xi) : la valeur trouvée aurait fait admettre ou rejeter la solution.

*Calcul des poussées, etc.*

ÉQUATION (XVI).

$$\text{l.}\frac{e^2}{q^2} = 7{,}99026$$
$$\text{l. } 3 = 0{,}47712$$
$$\alpha_1 = 89^\circ\, 48'\, 48'' \ldots\ldots\ldots\ \text{l. cot}\,\alpha_1 = 7{,}51314$$
$$\text{l. sin}\,\alpha_1 = 0$$
$$\text{l. cos}\,\alpha_1 = 7{,}51314$$

1re ÉQUATION (XVII).

$$\text{l.}\frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = 7{,}51314$$
$$f + k'' = 18{,}7396 \ldots\ldots\ \text{l.} = 1{,}27276$$
$$\frac{1}{3}(f+k'')\frac{e^2}{q^2} = 0{,}06108 \ldots\ldots\ \text{l.} = 8{,}78590$$
$$g = 30{,}035$$
$$x''_1 = 30{,}09608$$

ÉQUATION (XVIII).

$$\text{l. } e\mu_1 = 2{,}31901$$
$$\frac{T_1}{\lambda} = \frac{T_1}{\lambda}\sin\alpha_1 = 508628.\text{kil} \ldots\ldots\ \text{l.} = 5{,}70640$$
$$\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1 = 1658 \ldots\ldots\ldots\ \text{l.} = 3{,}21954$$

ÉQUATIONS (XIX).

$$\frac{1}{2}e\sin\alpha_1 = 0{,}92790 \ldots\ \text{l.}\frac{1}{2}e = 9{,}96750$$
$$\frac{1}{2}e\cos\alpha_1 = 0{,}00302 \ldots\ldots\ \text{l.} = 7{,}48064$$
$$x_1 = 31{,}02398$$
$$y_1 = 18{,}74498$$

ÉQUATIONS (XX) ET (XXI).

$y'_1 = 18{,}74196\ldots$ l. $y'_1 = 1{,}27281$
$y'_0 = 0{,}65\ldots\ldots$ l. $y'_0 = 9{,}81291$

$y_1'^2 = 351{,}253\ldots\ldots$ l. $= 2{,}54562$
$y_0'^2 = 0{,}422\ldots\ldots$ l. $= 9{,}62582$

$y_1'^2 - y_0'^2 = 350{,}831$

$\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2) = 175{,}415\ldots\ldots$ l. $= 2{,}24407$

l. $\varpi = 3{,}38739$

$\frac{U}{\lambda} = 428016$ kil..... l. $= 5{,}63146$

ÉQUATION (XXII).

$y_1'^3 = 6583{,}09\ldots\ldots$ l. $= 3{,}81843$
$y_0'^3 = 0{,}27\ldots\ldots$ l. $= 9{,}43873$

$y_1'^3 - y_0'^3 = 6582{,}82$

$\frac{1}{3}(y_1'^3 - y_0'^3) = 2194{,}27\ldots\ldots$ l. $= 3{,}34129$

l. dénom. $= 2{,}24407$

$a = 12{,}5089\ldots\ldots$ l. $= 1{,}09722$

ÉQUATION (XXIII).

$\frac{V}{\lambda} = 208^{mq},454\ldots\ldots$ l. $= 2{,}31901$

ÉQUATION (XXIII *bis*), *vérification.*

$\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1 + \frac{U}{\lambda} = 429674\ldots\ldots$ l. $= 5{,}63314$

l. $\varpi e \mu_0 = 5{,}63316$

erreur $= 2$

Nous reviendrons tout à l'heure sur l'emploi des quantités U et $T_1$ dans le calcul des culées.

*Calcul des coordonnées, inclinaisons des plans de joint, rayons de courbure, épaisseurs.*

De ce que les constantes $Q^2$, $e$, $q^2$ et $h''$ sont les mêmes que dans l'exemple du n° 47, il résulte que le tableau annexé à ce numéro fournira toutes les quantités demandées, pour des angles $\alpha$ compris entre 0° et 34°; il reste donc à poursuivre le calcul jusque vers 90°.

Nous donnons la suite de ces calculs dans le tableau ci-joint, où nous avons fait $\Delta\alpha = 3°$, de 32° à 62°; et $\Delta\alpha = 4°$, de 62° à 90°, afin d'abréger les calculs. Dans ce tableau, les constantes, sauf $\Delta\alpha$, sont les mêmes que dans le précédent; et les valeurs de $x''$ et $y''$, qui nous ont servi de point de départ, sont celles du précédent tableau qui se rapportent à $\alpha = 32°$.

ARCHES COMPLÈTE

PROJET D'ARCHE À GRANDE PORTÉE, DE 60$^{m}$,070 D'OUVERTURE ET DE 16$^{m}$,2338 DE FLÈCHE.

**FORMULES.**

$$\rho'' = \frac{Q^2 - \frac{1}{3} e^2 \cos\alpha}{y''},$$

$$\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'' = \rho'' \frac{y'' + \rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha}{y'' + \frac{3}{2}\rho'' \sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha},$$

$$\Delta y'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'') \sin(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha,$$

$$\Delta x'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'') \cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha.$$

*Pour vérification :*

$$\rho''_m + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''_m - \tfrac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1}) = \text{erreur}.$$

---

$$y' = y'' - e\cos\alpha,$$

$$x' = x'' + e\sin\alpha,$$

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} y'',$$

$$\varepsilon = e + 2\delta,$$

$$Y = y'' + 2\delta\cos\alpha,$$

$$X = x'' - 2\delta\sin\alpha.$$

---

**CONSTANTES.**

| | |
|---|---|
| $\Delta\alpha = 3°$. | $\Delta\alpha = 4°$. |
| $\Delta\alpha = 0{,}0523599$ | $\Delta\alpha = 0{,}0698132$ |
| l. $\Delta\alpha = 8{,}71900$ | l. $\Delta\alpha = 8{,}84394$ |

$$Q^2 = 173{,}751$$

$$\text{l. } \tfrac{1}{3}e^2 = 0{,}05994$$

$$\alpha = 32° \begin{cases} y'' = 7{,}67036 \\ x'' = 22{,}77686 \end{cases}$$

$$\text{l. } \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = 7{,}51314$$

| $\alpha$ | 32° | 35° | 38° | 41° | 44° | 47 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| l. $\sin\alpha$ | 9,72421 | 9,75859 | 9,78934 | 9,81694 | 9,84177 | 9,86 |
| l. $\cos\alpha$ | 9,92842 | 9,91336 | 9,89653 | 9,87778 | 9,85693 | 9,83 |
| l. $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$ | 9,74189 | 9,77439 | 9,80351 | 9,82968 | 9,85324 | 9,87 |
| l. $\cos(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$ | 9,92111 | 9,90518 | 9,88741 | 9,86763 | 9,84566 | 9,82 |
| l. $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 8,46089 | 8,49339 | 8,52251 | 8,54868 | 8,57224 | 8,59 |
| l. $\cos(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 8,64011 | 8,62418 | 8,60641 | 8,58663 | 8,56466 | 8,54 |
| l. $\frac{1}{3}e^2\cos\alpha$ | 9,98836 | 9,97330 | 9,95647 | 9,93772 | 9,91687 | 9,89 |
| $y''$ | 7,67036 | 8,29680 | 8,92282 | 9,54694 | 10,16801 | 10,78 |
| $x''$ | 22,77686 | 23,72332 | 24,56934 | 25,32647 | 26,00425 | 26,61 |
| $\frac{1}{3}e^2\cos\alpha$ | 0,974 | 0,940 | 0,905 | 0,866 | 0,826 | 0,78 |
| $Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha$ | 172,777 | 172,811 | 172,846 | 172,885 | 172,925 | 172,96 |
| l. $[Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha]$ | 2,23748 | 2,23757 | 2,23766 | 2,23776 | 2,23786 | 2,23 |
| l. $y''$ | 0,88482 | 0,91891 | 0,95050 | 0,97986 | 1,00724 | 1,03 |
| l. $\rho''$ | 1,35266 | 1,31866 | 1,28716 | 1,25790 | 1,23062 | 1,20 |
| l. $\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 9,81355 | 9,81205 | 9,80967 | 9,80658 | 9,80286 | 9,79 |
| $\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 0,65095 | 0,64871 | 0,64516 | 0,64059 | 0,63513 | 0,62 |
| $y'' + \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 8,32131 | 8,94551 | 9,56798 | 10,18753 | 10,80314 | 11,41 |
| $\frac{1}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 0,32547 | 0,32435 | 0,32258 | 0,32029 | 0,31756 | 0,31 |
| $y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$ | 8,64678 | 9,26986 | 9,89056 | 10,50782 | 11,12070 | 11,72 |
| l. $[y'' + \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$ | 0,92019 | 0,95161 | 0,98082 | 1,00807 | 1,03355 | 1,05 |
| l. $[y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$ | 0,93686 | 0,96707 | 0,99522 | 1,02151 | 1,04613 | 1,06 |
| l. $[\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'']$ | 1,33599 | 1,30320 | 1,27276 | 1,24446 | 1,21804 | 1,19 |
| l. $\Delta y''$ | 9,79688 | 9,79659 | 9,79527 | 9,79314 | 9,79028 | 9,78 |
| l. $\Delta x''$ | 9,97610 | 9,92738 | 9,87917 | 9,83109 | 9,78270 | 9,73 |
| $\Delta y''$ | 0,62644 | 0,62602 | 0,62412 | 0,62107 | 0,61699 | 0,61 |
| $\Delta x''$ | 0,94646 | 0,84602 | 0,75713 | 0,67778 | 0,60632 | 0,53 |
| $\rho''$ | 22,525 | 20,829 | 19,371 | 18,109 | 17,007 | 16,03 |
| Vérification: $\rho''_m + \rho''_{m+1}$ | 43,354 | 40,200 | 37,480 | 35,116 | 33,045 | 31,2 |
| Vérification: $\frac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1})$ | 21,677 | 20,100 | 18,740 | 17,558 | 16,522 | 15,6 |
| Vérification: $\rho''_m + \frac{1}{2}\Delta\rho''_m$ | 21,677 | 20,100 | 18,740 | 17,558 | 16,521 | 15,6 |
| Vérification: erreur | 0 | 0 | 0 | 0 | —1 | — |
| l. $e\sin\alpha$ | 9,99274 | 0,02712 | 0,05787 | 0,08547 | 0,11030 | 0,1 |
| l. $e\cos\alpha$ | 0,19695 | 0,18189 | 0,16506 | 0,14631 | 0,12546 | 0,1 |
| $e\sin\alpha$ | 0,98342 | 1,06444 | 1,14254 | 1,21750 | 1,28914 | 1,3 |
| $e\cos\alpha$ | 1,57380 | 1,52016 | 1,46238 | 1,40059 | 1,33494 | 1,2 |
| $y'$ | 6,0964 | 6,7766 | 7,4604 | 8,1463 | 8,8331 | 9,5 |
| $x'$ | 23,7603 | 24,7878 | 25,7119 | 26,5440 | 27,2934 | 27,9 |
| l. $2\delta$ | 8,3980 | 8,4321 | 8,4636 | 8,4930 | 8,5204 | 8,5 |
| l. $2\delta\sin\alpha$ | 8,1222 | 8,1907 | 8,2529 | 8,3099 | 8,3622 | 8,4 |
| l. $2\delta\cos\alpha$ | 8,3264 | 8,3455 | 8,3601 | 8,3708 | 8,3773 | 8,3 |
| $2\delta$ | 0,02500 | 0,02705 | 0,02908 | 0,03112 | 0,03314 | 0,0 |
| $2\delta\sin\alpha$ | 0,01325 | 0,01551 | 0,01790 | 0,02041 | 0,02303 | 0,0 |
| $2\delta\cos\alpha$ | 0,02120 | 0,02216 | 0,02291 | 0,02349 | 0,02384 | 0,0 |
| $\varepsilon$ | 1,8808 | 1,8829 | 1,8849 | 1,8869 | 1,8889 | 1,8 |
| Y | 7,6916 | 8,3190 | 8,9457 | 9,5704 | 10,1918 | 10,8 |
| X | 22,7636 | 23,7082 | 24,5514 | 25,3060 | 25,9812 | 26,5 |

*EN ANSE DE PANIER.*

CUL DES COORDONNÉES, INCLINAISONS DES PLANS DE JOINT, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS.

| 0° | 53° | 56° | 59° | 62° | 66° | 70° | 74° | 78° | 82° | 86° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18425 | 9,90235 | 9,91857 | 9,93307 | 9,94593 | 9,96073 | 9,97299 | 9,98284 | 9,99040 | 9,99575 | 9,99894 | 0 |
| 10807 | 9,77946 | 9,74756 | 9,71184 | 9,67161 | 9,60931 | 9,53405 | 9,44034 | 9,31788 | 9,14356 | 8,84358 | $\overline{\infty}$ |
| 19354 | 9,91069 | 9,92603 | 9,93970 | 9,95366 | 9,96711 | 9,97821 | 9,98690 | 9,99335 | 9,99761 | 9,99974 | 9,99974 |
| 19415 | 9,76395 | 9,73021 | 9,69234 | 9,64184 | 9,57358 | 9,48998 | 9,38368 | 9,23967 | 9,01923 | 8,54282 | 8,5428– |
| 11254 | 8,62969 | 8,64503 | 8,65870 | 8,79760 | 8,81111 | 8,82215 | 8,83084 | 8,83729 | 8,84155 | 8,84368 | 8,84368 |
| 11315 | 8,48295 | 8,44921 | 8,41134 | 8,48578 | 8,41752 | 8,33392 | 8,22762 | 8,08361 | 7,86317 | 7,38676 | 7,3868– |
| 36801 | 9,83940 | 9,80750 | 9,77178 | 9,73155 | 9,66925 | 9,59399 | 9,50028 | 9,37782 | 9,20350 | 8,90352 | $\overline{\infty}$ |
| 19708 | 12,00344 | 12,60341 | 13,19634 | 13,78164 | 14,54951 | 15,30153 | 16,03655 | 16,75349 | 17,45134 | 18,12909 | 18,78581 |
| 15208 | 27,63441 | 28,06236 | 28,44009 | 28,77124 | 29,14576 | 29,44960 | 29,68842 | 29,86718 | 29,99023 | 30,06147 | 30,08440 |
| 38 | 0,691 | 0,642 | 0,591 | 0,539 | 0,468 | 0,393 | 0,316 | 0,239 | 0,160 | 0,080 | 0 |
| 13 | 173,060 | 173,109 | 173,160 | 173,212 | 173,283 | 173,358 | 173,435 | 173,512 | 173,591 | 173,671 | 173,751 |
| 13808 | 2,23820 | 2,23832 | 2,23845 | 2,23858 | 2,23876 | 2,23894 | 2,23914 | 2,23933 | 2,23953 | 2,23973 | 2,23993 |
| 15679 | 1,07931 | 1,10049 | 1,12046 | 1,13930 | 1,16285 | 1,18474 | 1,20511 | 1,22410 | 1,24183 | 1,25838 | 1,27383 |
| 18129 | 1,15889 | 1,13783 | 1,11799 | 1,09928 | 1,07591 | 1,05420 | 1,03403 | 1,01523 | 0,99770 | 0,98135 | 0,96610 |
| 19383 | 9,78858 | 9,78286 | 9,77669 | 9,89688 | 9,88702 | 9,87636 | 9,86487 | 9,85252 | 9,83925 | 9,82503 | 9,80978 |
| 12206 | 0,61458 | 0,60654 | 0,59799 | 0,78864 | 0,77094 | 0,75225 | 0,73261 | 0,71205 | 0,69064 | 0,66839 | 0,64533 |
| 11914 | 12,61802 | 13,20995 | 13,79433 | 14,57028 | 15,32045 | 16,05378 | 16,76916 | 17,46556 | 18,14198 | 18,79748 | 19,43114 |
| 31103 | 0,30729 | 0,30327 | 0,29899 | 0,39432 | 0,38547 | 0,37612 | 0,36630 | 0,35603 | 0,34532 | 0,33419 | 0,32266 |
| 13017 | 12,92531 | 13,51322 | 14,09332 | 14,96460 | 15,70592 | 16,42990 | 17,13546 | 17,82159 | 18,48730 | 19,13167 | 19,75380 |
| 17987 | 1,10099 | 1,12090 | 1,13970 | 1,16347 | 1,18527 | 1,20558 | 1,22451 | 1,24218 | 1,25869 | 1,27410 | 1,28850 |
| 19097 | 1,11144 | 1,13076 | 1,14901 | 1,17506 | 1,19606 | 1,21563 | 1,23390 | 1,25094 | 1,26687 | 1,28175 | 1,29565 |
| 17019 | 1,14844 | 1,12797 | 1,10868 | 1,08769 | 1,06512 | 1,04415 | 1,02464 | 1,00647 | 0,98952 | 0,97370 | 0,95895 |
| 18273 | 9,77813 | 9,77300 | 9,76738 | 9,88529 | 9 87623 | 9,86630 | 9,85548 | 9,84376 | 9,83107 | 9,81738 | 9,80253 |
| 18334 | 9,63139 | 9,57718 | 9,52002 | 9,57347 | 9,48264 | 9,37807 | 9,25226 | 9,09008 | 8,85272 | 8,36046 | 8,3457– |
| 10636 | 0,59997 | 0,59292 | 0,58530 | 0,76787 | 0,75202 | 0,73502 | 0,71694 | 0,69785 | 0,67775 | 0,65672 | 0,63464 |
| 8233 | 0,42795 | 0,37773 | 0,33115 | 0,37452 | 0,30384 | 0,23882 | 0,17876 | 0,12305 | 0,07124 | 0,02293 | –0,02217 |
| 81 | 14,417 | 13,735 | 13,122 | 12,5684 | 11,9100 | 11,3292 | 10,8151 | 10,3569 | 9,9481 | 9,5797 | 9,2491 |
| 98 | 28,152 | 26,857 | 25,690 | 24,4784 | 23,2392 | 22,1443 | 21,1720 | 20,3050 | 19,5278 | 18,8288 | » |
| 99 | 14,076 | 13,428 | 12,845 | 12,2392 | 11,6196 | 11,0721 | 10,5860 | 10,1525 | 9,7639 | 9,4144 | » |
| 98 | 14,075 | 13,427 | 12,843 | 12,2374 | 11,6177 | 11,0701 | 10,5840 | 10,1501 | 9,7617 | 9,4124 | » |
| –1 | —1 | —1 | —2 | —18 | —19 | —20 | —20 | —24 | —22 | —20 | » |
| 5278 | 0,17088 | 0,18710 | 0,20160 | 0,21446 | 0,22926 | 0,24152 | 0,25137 | 0,25893 | 0,26428 | 0,26747 | 0,26853 |
| 7660 | 0,04799 | 0,01609 | 9,98037 | 9,94014 | 9,87784 | 9,80258 | 9,70887 | 9,58641 | 9,41209 | 9,11211 | $\overline{\infty}$ |
| 1161 | 1,48211 | 1,53851 | 1,59074 | 1,63855 | 1,69535 | 1,74389 | 1,78390 | 1,81522 | 1,83772 | 1,85127 | 1,85580 |
| 1289 | 1,11684 | 1,03774 | 0,95581 | 0,87125 | 0,75482 | 0,63472 | 0,51153 | 0,38584 | 0,25828 | 0,12945 | 0 |
| 41 | 10,8866 | 11,5657 | 12,2405 | 12,9160 | 13,8000 | 14,6718 | 15,5298 | 16,3722 | 17,1974 | 18,0038 | 18,7858 |
| 37 | 29,1165 | 29,6009 | 30,0308 | 30,4098 | 30,8411 | 31,1935 | 31,4723 | 31,6824 | 31,8280 | 31,9127 | 31,9402 |
| 99 | 8,5924 | 8,6136 | 8,6336 | 8,6524 | 8,6760 | 8,6979 | 8,7183 | 8,7372 | 8,7550 | 8,7715 | 8,7870 |
| 41 | 8,4948 | 8,5322 | 8,5667 | 8,5983 | 8,6367 | 8,6709 | 8,7011 | 8,7276 | 8,7508 | 8,7704 | 8,7871 |
| 80 | 8,3719 | 8,3612 | 8,3454 | 8,3240 | 8,2853 | 8,2320 | 8,1587 | 8,0551 | 7,8986 | 7,6151 | $\overline{\infty}$ |
| 715 | 0,03912 | 0,04108 | 0,04301 | 0,04492 | 0,04743 | 0,04988 | 0,05228 | 0,05460 | 0,05689 | 0,05909 | 0,06124 |
| 845 | 0,03110 | 0,03406 | 0,03687 | 0.03966 | 0,04332 | 0,04687 | 0,05025 | 0,05341 | 0,05634 | 0,05894 | 0,06124 |
| 388 | 0,02355 | 0,02297 | 0,02215 | 0,02109 | 0,01929 | 0,01706 | 0,01441 | 0,01135 | 0,00792 | 0,00412 | 0 |
| 30 | 1,8949 | 1,8969 | 1,8988 | 1,9007 | 1,9032 | 1,9057 | 1,9081 | 1,9104 | 1,9127 | 1,9149 | 1,9170 |
| 10 | 12,0270 | 12,6264 | 13,2185 | 13,8027 | 14,5688 | 15,3186 | 16,0510 | 16,7648 | 17,4593 | 18,1332 | 18,7858 |
| 36 | 27,6033 | 28,0283 | 28,4032 | 28,7316 | 29,1024 | 29,4027 | 29,6382 | 29,8138 | 29,9339 | 30,0025 | 30,0232 |

La marche des erreurs affecte une grande régularité : d'un autre côté, les valeurs des coordonnées autres que $y''$, et celles des épaisseurs, ayant été vérifiées par les différences successives, il n'est pas admissible qu'il se soit glissé quelque faute de calcul assez notable pour qu'on doive s'y arrêter.

Pour comparer le résultat fourni par notre tableau à celui que donnent les Tables, il convient ici de rechercher à quelle valeur de $\alpha$ répond le maximum de l'abscisse X de l'intrados réel, et la valeur correspondante de Y; nous comparerons ensuite $\alpha$ à l'angle $\alpha_1$ calculé plus haut, et le maximum de X à la demi-ouverture $g$, puis Y à $Y_1$. Soit $n$ la fraction de l'intervalle $\Delta\alpha = 4^\circ$ comptée à partir de 90° vers 0°, à laquelle répond le maximum de X; nous aurons, pour expression générale de X, dans le voisinage de 90°, à l'aide des différences de X prises dans le même sens que $n$,

$$X = 30{,}0232 - n \,.\, 0{,}0207 - \frac{n(n-1)}{2} \,.\, 0{,}0479 - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} \,.\, 0{,}0036,$$

d'où l'on tire, en posant $\frac{dX}{dn} = 0$,

$$0 = -0{,}0207 - \frac{2n-1}{2} \,.\, 0{,}0479 - \frac{3n^2 - 6n + 2}{6} \,.\, 0{,}0036.$$

Cette équation donne, en réduisant et tirant la valeur de $n$ d'une certaine manière,

$$n = + \frac{0{,}041}{0{,}886 + 0{,}036\, n},$$

d'où

$$n = + 0{,}04619.$$

La valeur correspondante de $\alpha$ est $90^\circ - n.4^\circ$, ou $89^\circ\, 48'\, 55''$: cet angle étant comparé à la valeur de $\alpha_1$ calculée directement, donne une différence de $7''$ qui est tout à fait insensible; et même, pour pouvoir répondre de l'exactitude de cette différence, il faudrait avoir déterminé les différences de X avec une figure de plus.

L'expression générale de Y, en partant de $\alpha = 90°$, s'obtient de la même manière que celle de X; elle est

$$Y = 18,7858 - n.\,0,6526 - \frac{n(n-1)}{2}\,0,0213.$$

En substituant la valeur de $n$ dans les expressions de X et Y, il vient

$$X = 30,0232, \qquad Y = 18,7561;$$

or nous avions

$$g = 30,035.., \qquad Y_1 = 18,7480;$$

les erreurs sont donc

$$-\ 0^m,0118,\ldots\ldots +\ 0^m,0081.$$

On pourra généralement négliger de telles erreurs dans la pratique. Pour les réduire, il eût fallu prendre des valeurs de $\Delta\alpha$ plus petites que celles employées.

La valeur de l'épaisseur $\varepsilon$ qui figure dans la dernière colonne du tableau fera connaître la largeur minimum des piles : en effet, cette largeur doit être au moins égale au double de la projection horizontale du joint extrême, ou à $2\varepsilon$ dans le cas actuel, et dans l'hypothèse où les matériaux qui forment les assises des piles présentent autant de résistance que les voussoirs. La largeur des piles serait donc au minimum de $3^m,834$.

### CALCUL DES CONSTANTES NÉCESSAIRES À L'EXÉCUTION DU TRACÉ.

Ces constantes étant évidemment les mêmes que dans l'exemple précédent, nous renverrons à cet exemple, en rappelant que, si l'angle $\widehat{E'_1 E' E''}$ n'était pas déjà déterminé, on le ferait, sans calcul, égal au complément de $\alpha_1$.

On trouvera, planches I et II, le profil de l'arche qui vient d'être calculée et l'élévation d'un pont à plusieurs arches construite sur ce profil.

En comparant le tracé de l'intrados à celui d'une demi-ellipse ayant pour demi-axes la flèche et la demi-ouverture de l'arche qui nous occupe, on verra que l'écart de ces courbes s'élève jusqu'à $0^m,40$, et qu'il a lieu vers les 0,7 de la distance des naissances à la verticale qui passe par le sommet. Si l'on voulait substituer l'ellipse à notre intrados, en donnant pour épaisseur à la voûte celle que nous avons trouvée pour les naissances, et qui est $1^m,92$, on trouverait, en raisonnant comme au n° 32, que la résultante des pressions pourrait passer à une distance de l'extrados elliptique égale à $0^m,59$, quantité qui n'est que les $\frac{4}{13}$ environ de l'épaisseur. Or, les pressions ne s'exerçant que sur une étendue triple de celle-ci ou égale à $1^m,77$, il s'ensuit que les joints s'ouvriraient à l'intrados d'une profondeur de $0^m,15$ autour du point où les deux courbes présentent le plus grand écart. La pression moyenne y serait représentée par la valeur de $\mu$ relative au joint considéré, multipliée par $\frac{1,8558}{1,77} = 1,05$, et la pression vers l'extrados, par cette même valeur multipliée par 2,1. Cette dernière serait donc plus que double de la pression qui aurait lieu dans notre système.

L'exemple que nous venons de présenter montre que, sauf les difficultés d'exécution, on peut construire des arches de très-grande portée dans les conditions d'une très-grande stabilité, sans donner aux voûtes des épaisseurs exagérées. Nous ne croyons pas avoir fixé la limite du possible : dans cet exemple et le précédent, les charges maximum que supportent les voussoirs n'excèdent pas $112^m,33$; tandis qu'en employant le liais de Bagneux par exemple, on pourrait charger les voussoirs jusqu'à 180 mètres, sans excéder le $\frac{1}{10}$ de la charge de rupture.

La nécessité de donner un large débouché aux arches des ponts qui traversent nos grands fleuves a reçu une nouvelle confirmation dans ces derniers temps. On s'accorde à admettre qu'une partie des désastres survenus aux environs d'Orléans en 1846 est due

au manque de débouché du pont de Vierzon et à la présence du remblai par lequel on aborde ce pont du côté du sud.

On conçoit, en effet, que des arches à grande portée, assises sur des piles fortes et peu nombreuses, présentent un débouché total plus grand et plus facile qu'une série de petites arches établies sur des piles un peu plus faibles, mais plus nombreuses.

Avant de passer en revue divers ponts construits en France ou ailleurs, nous allons présenter quelques considérations sur l'établissement des culées dans les ponts où les arches sont *en anse de panier*.

### DÉTERMINATION DE LA FORME QU'IL CONVIENT DE DONNER À LA PARTIE SUPÉRIEURE DES CULÉES (*DIGRESSION*).

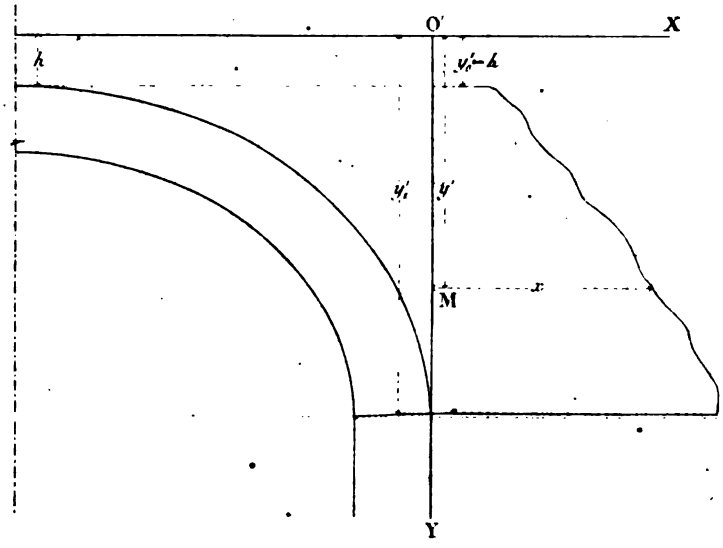
49. Nous prendrons pour exemple les culées sur lesquelles devrait s'appuyer l'arche étudiée dans le numéro précédent.

D'après ce qui a été dit jusqu'ici, nous considérerons la partie déterminée du profil d'une culée comme étant formée par : une verticale passant par le point inférieur de l'intrados, la ligne de joint des naissances, la verticale menée par le point inférieur de l'extrados, et une horizontale menée au niveau du sommet de l'extrados (*). Nous supposerons la culée terminée latéralement par le plan des têtes, quoique, dans certains cas, il soit préférable de donner aux culées une largeur croissante à partir du massif, au moyen de murs en aile. Le problème à résoudre est la détermination de la forme qu'il convient de donner à la partie extérieure du profil de la culée, ou à la partie qui limite la face de la culée opposée au massif, cette face étant supposée perpendiculaire aux plans des têtes.

(*) Si l'on pouvait compter sur la résistance du sol aux abords du pont, il suffirait d'élever les maçonneries de la culée jusqu'à la hauteur du point inférieur de l'extrados, puisque la partie supérieure de la culée doit seulement résister à l'action exercée par le massif agissant comme un fluide; mais il serait à craindre, dans le cas d'un débordement des eaux, que les abords ne fussent emportés ou du moins profondément ravinés, ce qui compromettrait la stabilité du pont. Il sera donc généralement plus prudent d'élever les maçonneries des culées jusqu'au niveau du sommet de l'extrados.

Considérons l'équilibre de la partie de l'une des culées limitée dans le sens vertical par deux plans horizontaux dont les ordonnées sont $y'_0$ et $y'_1$ égales respectivement aux ordonnées du sommet et du point inférieur de l'extrados. Admettons que, suivant l'habitude, on ne tienne aucun compte de la butée des terres qui s'exerce sur la face de la culée opposée au massif. Rappelons que le massif exerce sur la culée la même pression que si le massif était un liquide ayant la même densité, s'étendant jusqu'au plan horizontal tangent à l'extrados, et soumis, à sa partie supérieure, à une pression représentée par la hauteur $y'_0 = h$ des matériaux qui s'élèvent au-dessus de ce plan. La culée est censée soumise à la même pression verticale s'exerçant sur sa partie supérieure.

Ceci posé, faisons passer un axe vertical O'Y par le point inférieur de l'extrados, et conservons le même axe des $x$ que dans tout ce qui précède.




Soient $x$ et $y'$ les coordonnées d'un point du profil de la face de la culée opposée au massif;

$p$ le poids de la partie de la culée qui est limitée inférieure-

ment par un plan horizontal ayant $y'$ pour ordonnée, augmenté de la charge que supporte la culée supérieurement;

$\varpi''$ le poids de l'unité de volume des matériaux qui composent la culée;

$f$ le coefficient de frottement moyen de ces matériaux que nous supposerons, pour plus de simplicité, disposés par couches horizontales infiniment minces. (La lettre $f$ ne figure avec cette nouvelle signification que dans ce numéro; on ne la confondra donc pas avec la flèche des arches.)

D'après ce que nous avons vu, n° 28, la résultante des forces horizontales exercées par le massif sur la culée est représentée par

$$\int \varpi \lambda y' dy',$$

lorsque l'on a $i = 1$.

La condition d'équilibre de la portion de culée limitée inférieurement à l'ordonnée $y'$, que fournit la considération des forces horizontales, est simplement

$$fp > \int \varpi \lambda y' dy',$$

lorsque l'on fait abstraction de la cohésion. Différentiant cette inégalité et substituant pour $dp$ sa valeur

$$dp = \varpi'' \lambda x dy',$$

on en déduit

$$y' < f \frac{\varpi''}{\varpi} x.$$

Il est possible de satisfaire à cette inégalité de bien des manières différentes. Soit $f'$ un nombre plus petit que $f$, on pourra écrire

$$y' = f' \frac{\varpi''}{\varpi} x,$$

et le profil de la culée sera une ligne droite passant par l'origine des coordonnées et inclinée au-dessous de l'horizontale, d'une quantité moindre que l'angle du frottement multiplié par le rapport de la densité de la culée à celle du massif.

Soit $a$ une constante positive, l'inégalité précédente sera encore satisfaite si l'on pose

$$y' = f\frac{\varpi''}{\varpi}(x - a),$$

d'où

$$x = a + \frac{1}{f}\frac{\varpi}{\varpi''}y',$$

et même, si dans cette relation on remplace $f$ par $f'$; mais cela ne sera pas nécessaire, puisque le poids des terres qui viendront s'appuyer sur le profil de la culée déterminera une pression verticale sensiblement égale au poids de la culée lorsque $a$ sera une petite longueur, et que, par suite, le frottement limite $fp$ se trouvera à peu près doublé.

Si nous supposons $\varpi'' = \varpi$, et que nous prenions avec M. Boistard $f = 0,76$, nous pourrons donner au profil une inclinaison de $37^\circ\ 14'$ sur l'axe des $x$. Les bases supérieure et inférieure du trapèze qui forme les faces latérales de la partie des culées dont nous nous occupons, devraient excéder respectivement $\frac{y'_0}{0,76}$ et $\frac{y'_1}{0,76}$ ou $0^m,854$ et $24^m,60$ environ; la largeur moyenne de ce trapèze serait donc plus grande que $12^m,73$.

Le frottement développé peut théoriquement prendre toute valeur nécessaire à la stabilité dans le cas actuel; mais, en pratique, il convient que la poussée horizontale exercée sur la culée reste inférieure à la cohésion des matériaux dont elle est formée, alors même que cette poussée serait inférieure au frottement théorique.

Soit $\varkappa$ la cohésion par unité superficielle, la condition d'équilibre relative à la cohésion serait exprimée par l'inégalité

$$\varkappa\lambda x > \frac{1}{2}\varpi\lambda\,(y'^2 - y_0'^2),$$

d'où, $a'$ désignant une constante positive,

$$x - a' = \frac{1}{2}\frac{\varpi}{\varkappa}(y'^2 - y_0'^2).$$

Le profil fourni par cette considération est une parabole dont l'axe coïncide avec l'axe des $x$, et la concavité est dirigée vers les $x$ positifs : cette parabole coupe l'horizontale menée par le sommet de l'extrados au point dont l'abscisse est $a'$, puisque l'équation du profil est satisfaite par le système de valeurs $x = a'$, $y' = y'_0$. On pourrait aussi satisfaire à l'inégalité précédente en substituant dans l'équation de la parabole un coefficient $\varkappa' < \varkappa$ à la place de ce dernier.

Il faudrait, pour se conformer aux indications de quelques ingénieurs, employer celui des deux profils rectiligne et parabolique pour lequel l'abscisse $x$ relative à la même valeur de $y'$ est la plus grande.

Soit $l$ l'excès de l'abscisse du profil rectiligne sur celle du profil parabolique pour une même ordonnée $y'$, et posons

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{f}\frac{\varpi}{\varpi'}, \qquad \frac{1}{n} = \frac{\varpi}{\varkappa},$$

d'où

$$m = \frac{1}{f}\frac{\varkappa}{\varpi'};$$

on aura

$$l = a - a' + \frac{y_0'^2}{2n} + \frac{y'}{n}\left(m - \frac{1}{2}y'\right):$$

la quantité $a - a'$ étant arbitraire, nous pourrons, pour fixer les idées, la supposer assujettie à la condition

$$a - a' + \frac{y_0'^2}{2n} = 0,$$

et l'on aura simplement

$$l = \frac{y'}{n}\left(m - \frac{1}{2}y'\right).$$

Sous cette forme, on voit aisément que l'on aura d'abord $l = 0$ pour $y' = 0$; c'est-à-dire que les deux profils se couperont en un point de l'axe des $x$ qui aura pour abscisse $x = a$. La différence $l$ restera positive tant que l'on aura $y' < 2m$, et les deux profils se

couperont de nouveau au point dont l'ordonnée est $y' = 2m$; au delà, la quantité $l$ deviendra négative, c'est-à-dire que le profil parabolique aura son abscisse plus grande que le profil rectiligne d'une quantité qui deviendra $\frac{y'_1}{n}\left(\frac{1}{2}y'_1 - m\right)$ au point le plus bas des deux profils.

Soient $\varpi = \varpi'' = 2440$ kil., $\varkappa = 10000$ kil., et, comme plus haut, $f = 0,76$; on aura $n = 4^m,10$, $m = 5^m,39$. Les deux profils se rencontreront au point dont l'ordonnée est $16^m,78$; et, en observant que l'ordonnée $y'_1$ est $18^m,74$, on trouvera que l'écart horizontal de ces profils s'élève jusqu'à $18^m,19$. Cette grande différence tient au coefficient $\varkappa$ que nous avons lieu de croire beaucoup trop faible. (Dans les expériences relatives à la cohésion, les blocs sur lesquels on a expérimenté se détachaient en tournant autour d'une arête au lieu de glisser horizontalement sur leurs bases.) Il ne serait pas nécessaire de doubler le coefficient $\varkappa$ pour que les assises du profil parabolique deviennent toutes moindres que celles du profil rectiligne. Si l'on observe d'ailleurs que l'on n'a pas tenu compte de la butée des terres, on n'hésitera pas à adopter ce dernier profil dans toute l'étendue comprise entre les plans horizontaux dont les ordonnées sont $y'_0$ et $y'_1$.

Ayant admis, soit le profil rectiligne, soit le profil mixtiligne, déterminé à l'aide d'une valeur convenable de $\varkappa$, il ne serait pas sans intérêt de faire l'application de l'équation des moments à la portion de la culée limitée inférieurement par l'ordonnée quelconque $y'$. Pour cela, il faudrait supposer connue la loi de répartition des pressions dans le plan inférieur, admettre, comme Navier par exemple, qu'elles varient uniformément entre les limites de l'abscisse $x$, de sorte qu'en désignant par $\mu''$ la hauteur qui représente la pression en un point du plan $(y')$ dont $\xi''$ serait l'abscisse, on puisse poser

$$\mu'' = \mu''_0 + b\xi'' :$$

l'équation des moments, jointe à celle des projections verticales

des forces, servirait à déterminer les valeurs des constantes $\mu''_0$ et $b$ en fonction de $y'$. La quantité $\mu''$, qui deviendrait fonction des deux variables indépendantes $y'$ et $\xi''$, devrait être assujettie à ne point prendre de valeur négative, car ce serait supposer que l'on tient compte de la résistance à la rupture par traction; mais cette condition ne pourrait être vérifiée qu'*a posteriori*. Ajoutons encore qu'il ne paraît pas probable que les pressions varient dans l'étendue de couches horizontales formées de parties disjointes, commes elles varieraient dans l'étendue de la surface de joint de deux blocs uniques (*).

---

(*) Nous allons présenter ici la détermination des constantes $\mu''_0$ et $b$ de l'équation

$$\mu'' = \mu''_0 + b\,\xi'',$$

pour le cas du profil rectiligne.

Soit, pour abréger,

$$\frac{\varpi}{\varpi''} = i';$$

l'équation du profil rectiligne s'écrira

$$x = a + \frac{i'}{f}\,y',$$

et l'on aura

$$dy' = \frac{f}{i'}\,dx.$$

Formons l'équation d'équilibre des forces qui sollicitent la portion de la culée comprise entre les plans horizontaux $(y'_0)$ et $(y')$ projetées sur l'axe des $y$. Le poids d'une tranche horizontale d'épaisseur égale à $dy'$ est

$$dp = \varpi''\lambda x\,dy' = \varpi''\lambda\,\frac{f}{i'}\,x\,dx.$$

La composante parallèle à l'axe des $y$ de la réaction élémentaire exercée contre le plan $(y')$ sur l'étendue $\lambda d\xi''$ est

$$-\varpi''\lambda\mu''\,d\xi'' = -\varpi''\lambda(\mu''_0 + b\,\xi'')\,d\xi''.$$

Intégrant ces deux expressions, la première entre les limites $x_0$ et $x$, la seconde entre les limites $\xi'' = 0$ et $\xi'' = x$, puis égalant la somme des deux intégrales à zéro, il vient

$$\frac{f}{2i'}(x^2 - x^2_0) - \mu''_0\,x - \frac{1}{2}\,b\,x^2 = 0.$$

Prenons actuellement les moments autour d'un axe passant par le point M (voir

On pourrait encore faire un autre usage de l'équation des moments. Considérons l'équilibre de la partie de la culée qui est

---

la figure), afin d'éliminer ceux des forces horizontales développées dans le plan inférieur. Le moment élémentaire de $dp$, dans le sens de $x$ vers $y$, est

$$\frac{\varpi'\lambda f}{2i'}x^2dx;$$

celui de la composante parallèle à l'axe des $y$ de la réaction élémentaire développée dans le plan $(y')$ est d'ailleurs

$$-\varpi''\lambda(\mu''_0\xi''+b\xi''^2)d\xi''.$$

Quant au moment élémentaire de la poussée horizontale exercée par le massif contre la culée; soit $v$ l'ordonnée variable du point d'application, on aura pour expression du moment de la poussée élémentaire $\varpi\lambda v dv$, autour de M,

$$\varpi\lambda(y'-v)vdv,$$

quantité qui doit être intégrée entre les limites $y'_0$ et $y'$.

Effectuant entre leurs limites respectives les intégrations des trois expressions précédentes, et égalant la somme à zéro, il vient

$$\frac{f}{6i'}(x^3-x_0^3)-\frac{\mu''_0}{2}x^2-\frac{b}{3}x^3+\frac{i'}{6}(y'^3-3y'y_0'^2+2y_0'^3)=0.$$

Cette équation, jointe à celle des forces verticales, donne d'abord

$$-2\mu''_0x^2-bx^3=-\frac{f}{i'}x^3+\frac{f}{i'}xx_0^2,$$

$$+3\mu''_0x^2+2bx^3=+\frac{f}{i'}x^3-\frac{f}{i'}x_0x_0^2+i'(y'^3-3y'y_0'^2+2y_0'^3).$$

En ajoutant membre à membre, il vient

$$x^2(\mu''_0+bx)=\frac{f}{i'}x_0^2(x-x_0)+i'(y'^3-3y'y_0'^2+2y_0'^3).$$

Soit

$$\mu''_x=\mu''_0+bx,$$

en sorte que $\mu''_x$ représente la pression qui a lieu aux points du plan $(y')$ où celui-ci est limité par le profil de la culée, on aura

$$\mu''_x=\frac{f}{i'}\frac{x_0^2}{x^2}(x-x_0)+\frac{i'}{x^2}(y'^3-3y'y_0'^2+2y_0'^3);$$

limitée inférieurement par le plan $(y')$. Les forces qui sollicitent cette partie de la culée sont : 1° son propre poids augmenté de

---

les équations précédentes fournissent aisément les valeurs séparées de $\mu''_0$ et $b$:

$$\mu''_0 = \frac{f}{i'}x - \frac{f}{i'}\frac{x_0^2}{x^2}(2x - x_0) - \frac{i'}{x^2}(y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3),$$

$$b = -\frac{f}{i'} + \frac{f}{i'}\frac{x_0^2}{x^2}\left(\frac{3x - 2x_0}{x}\right) + \frac{2i'}{x^2}(y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3).$$

Il convient d'exprimer les valeurs de $x$ et $x_0$ en fonction de $y'$ et $y'_0$. Or, si nous posons

$$c = \frac{f}{i'}a,$$

nous aurons

$$x = \frac{i'}{f}(y' + c),$$

d'où

$$x_0 = \frac{i'}{f}(y'_0 + c);$$

à l'aide de ces valeurs, il viendra

$$\mu''_x = \left(\frac{y'_0 + c}{y' + c}\right)^2 (y' - y'_0) + \frac{f^2}{i'}\frac{y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3}{(y' + c)^2},$$

$$\mu''_0 = y' + c - \left(\frac{y'_0 + c}{y' + c}\right)^2 (2y' - y'_0 + c) - \frac{f^2}{i'}\frac{y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3}{(y' + c)^2},$$

$$b = -\frac{f}{i'} + \frac{f}{i'}\left(\frac{y'_0 + c}{y' + c}\right)^2 \frac{(3y' - 2y'_0 + c)}{y' + c} + 2\frac{f^2}{i'^2}\frac{y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3}{(y' + c)^3}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait $i' = 1$, et que les quantités $y'_0$ et $c$ soient nulles, le profil de la culée sera triangulaire et passera par l'origine des coordonnées; alors les formules précédentes donneront

$$\mu''_x = f^2 y', \qquad \mu''_0 = (1 - f^2)y' :$$

dans le cas de $f = \frac{2}{3}$, ces valeurs deviendront, à cause de $y'_0 = 0$ et $c = 0$,

$$\mu''_x = \frac{4}{9}y', \qquad \mu''_0 = \frac{5}{9}y'.$$

La comparaison de ces nombres montre que les pressions varieraient seulement de deux neuvièmes de leur valeur moyenne dans l'étendue d'un même plan horizontal. De cette manière, il y a lieu de croire que l'hypothèse de la variation uniforme des pressions ne serait pas très-éloignée de se réaliser. En prenant $f = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$, on trouverait $b = 0$; d'où $\mu'' = \frac{1}{2}y'$, quantité constante avec $y'$.

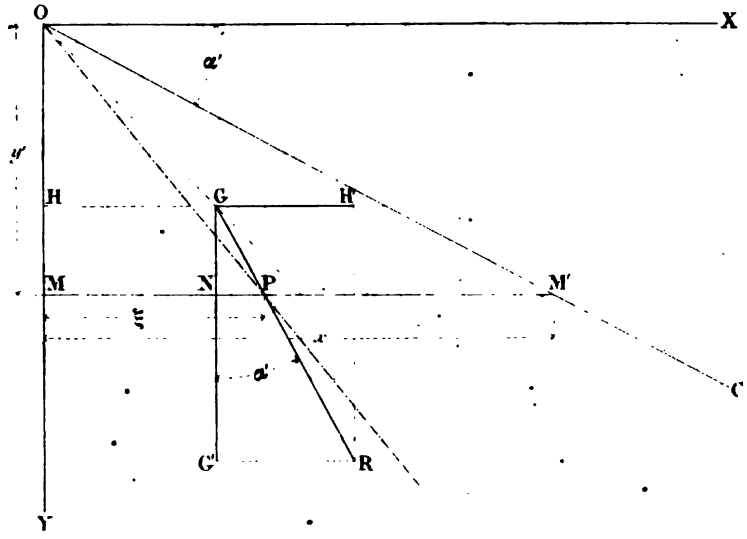
la charge qui peut agir supérieurement; 2° la poussée horizontale exercée par le massif; 3° les réactions qui se développent contre le plan $(y')$. Les composantes horizontales et verticales des premières forces sont connues, et donnent par un simple changement de signe les valeurs des composantes des réactions dans le plan $(y')$. Les moments des premières forces sont pareillement connus, en sorte que, si l'on substitue dans l'équation des moments les composantes connues de la résultante des réactions contre le plan $(y')$, cette équation ne contiendra d'autres inconnues que les coordonnées du point d'application de la résultante des réactions.

Soient $\xi$ et $\eta$ ces coordonnées, l'équation des moments présentera une relation entre $\xi$, $\eta$ et $y'$ qui n'est autre chose que l'équation de la droite suivant laquelle agit la résultante des réactions. La direction de cette résultante dépend de la valeur de $y'$ que l'on considère, de sorte que, pour chaque valeur de $y'$, on aura une droite particulière. Si l'on suppose construites les diverses droites qui répondent à toutes les valeurs possibles de $y'$, les intersections deux à deux des droites consécutives détermineront leur *courbe enveloppe*. Pour obtenir l'équation de cette courbe, il suffira, suivant la théorie connue des *courbes enveloppes*, d'éliminer $y'$ entre l'équation des moments et sa dérivée par rapport à la même quantité $y'$.

Si l'on fait $\eta = y'$ dans l'équation des moments ou de la droite suivant laquelle agit la résultante des réactions, cette équation fournira l'abscisse $\xi$ du point d'application de la résultante dans le plan $(y')$. L'équation que l'on obtiendra ainsi entre $\xi$ et $\eta$ est celle du lieu géométrique des points de rencontre des résultantes des réactions exercées sur les divers plans $(y')$ avec ces mêmes plans. Cette courbe est celle que l'on nomme *courbe des pressions*. La direction de la résultante s'obtiendrait en tirant de l'équation entre $\xi$, $\eta$ et $y'$ le rapport $\frac{d\eta}{d\xi}$ qui est égal à la tangente de l'angle formé par la résultante avec l'axe des $x$, et compté de $x$ vers $y$. On aurait encore cette direction en menant par le point de rencontre avec le plan $(y')$ une tangente à la *courbe enveloppe*.

Au lieu de développer l'analyse qui vient d'être indiquée, nous nous bornerons à présenter la détermination de la direction de la résultante des pressions et la construction de la *courbe des pressions*, dans le cas très-simple où le massif et la culée ayant la même densité, le profil extérieur de celle-ci est rectiligne, et aboutit dans sa partie supérieure à l'origine des coordonnées, la poussée exercée par le massif étant supposée, contrairement à ce que nous avons admis jusqu'ici, commencer à se produire en ce point.

Nous aurons recours à des considérations très-élémentaires de statique et de géométrie, et quoique les données actuelles soient sensiblement différentes des données primitives, le résultat sera cependant de nature à faire entrevoir ce qui devrait se passer s'il s'agissait de celles-ci.




Soient OC le profil rectiligne de la culée faisant avec l'horizontale l'angle $\alpha'$ (*); $y'$ l'ordonnée d'un plan horizontal MM'; G le centre de gravité du triangle OMM' dont l'ordonnée est $\frac{2}{3}y'$; H le

(*) Cet angle ne doit pas être confondu avec l'auxiliaire $\alpha'$ des n^os 36 et suivants.

point d'application de la poussée horizontale exercée par le massif et dont l'ordonnée est aussi $\frac{2}{3}y'$, en vertu de l'hypothèse de la fluidité.

Le poids de la partie supérieure de la culée limitée au plan MM' est $\frac{1}{2}\varpi\lambda y'x$, la résultante des pressions horizontales produites sur cette partie par le massif est simplement $\frac{1}{2}\varpi\lambda y'^2$. D'après ce qui vient d'être dit, ces forces concourent au point G, et la direction de leur résultante s'obtiendra en menant par ce point deux droites, l'une verticale, l'autre horizontale, respectivement proportionnelles aux intensités de ces forces, ou aux coordonnées $x$ et $y'$, et achevant le parallélogramme qui se résout ici en le rectangle G'GH'R. De cette manière, le triangle G'GR que l'on obtiendra sera semblable au triangle MM'O; l'angle G'GR sera égal à l'angle MM'O et aussi à l'angle M'OX que fait le profil avec l'horizontale. Il s'ensuit que la direction GR de la résultante des réactions est constante pour les divers plans horizontaux MM', et que cette direction fait avec la verticale un angle égal à celui du profil avec l'horizon. On voit déjà que la condition d'équilibre relative au frottement est que ce dernier angle soit moindre que *l'angle du frottement.*

Soit $\xi$ l'abscisse du point P où la résultante des réactions rencontre le plan MM'; l'angle G'GR étant égal à COX ou $\alpha'$, on aura

$$\xi = \overline{MN} + \overline{NP} = \overline{HG} + \overline{NG}\,\text{tang}\,\alpha',$$

ou, à cause de $\overline{HG} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}x$, et $\overline{NG} = \frac{1}{3}y'$,

$$\xi = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y'\,\text{tang}\,\alpha'.$$

Exprimons d'abord $\xi$ en fonction de $x$ : en vertu de

$$y' = x\,\text{tang}\,\alpha',$$

il viendra

$$\xi = \frac{1}{3\cos^2\alpha'}\,x.$$

Si l'on suppose $\alpha'$ égal à l'angle du frottement, et que l'on prenne, comme quelques auteurs, $\tang \alpha' = \frac{2}{3}$, on aura $\xi = \frac{13}{27} x$: la résultante des pressions passera, comme on le voit, très-près du milieu de la base MM'; pour qu'elle passât exactement au milieu, il faudrait que l'on eût $\tang \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$ ou $\alpha' = 35^\circ\ 15'\ 52''$. Cette valeur de $\tang \alpha'$ est presque la moyenne exacte entre le coefficient $\frac{2}{3}$ et le coefficient 0,76 indiqué par M. Boistard.

En éliminant $x$ entre les deux dernières équations, et changeant ensuite $y'$ en $\eta$, nous aurons pour équation de la *courbe des pressions*,

$$\xi = \frac{2}{3 \sin 2\alpha'} \eta,$$

ou

$$\eta = \frac{3}{2} \sin 2\alpha' \xi.$$

Cette équation montre que la courbe des pressions se réduit ici à une ligne droite passant par l'origine et inclinée sur l'axe des $x$ d'une quantité égale à $\frac{3}{2} \sin 2\alpha'$; c'est la droite OP de la figure. Son inclinaison serait égale à $\frac{18}{13}$ dans le cas de $\tang \alpha' = \frac{2}{3}$, et à $\sqrt{2}$ dans le cas de $\tang \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans cette dernière hypothèse, la droite OP se confondrait avec la direction PR des pressions.

Généralement, les directions PR menées par les divers points P étant toutes parallèles, n'ont pas de *courbe enveloppe*, ou du moins une telle courbe doit se réduire à une droite parallèle à PR, dont on ne considérerait que les points situés à l'infini.

Nous terminerons cette digression en faisant remarquer que l'établissement de la culée d'une arche *complète* serait entièrement fixé d'après ce que nous venons d'exposer, si le plan horizontal passant par le point inférieur de l'extrados, contre lequel s'appuie le dessus de la culée, présentait une résistance indéfinie; si, par

exemple, le roc vif affleurait à ce niveau. Dans le cas contraire, il y aura à considérer une autre portion de la culée sollicitée par des forces connues qui sont : 1° les actions qu'exerce la partie de la culée que nous venons d'étudier; 2° la force de direction presque verticale $T_1$ que nous avons calculée précédemment; et sollicitée en outre par les forces inconnues qui proviennent, tant du propre poids de la construction, que des réactions du sol et des actions fortuites ou accidentelles, lorsqu'on en voudra tenir compte.

### EXAMEN RAPIDE ET SUCCINCT DE QUELQUES ARCHES DE PONTS DECRITES DANS LES OUVRAGES DE PERRONET ET GAUTHEY.

50. Dans les numéros précédents, nous avons présenté avec les plus grands détails l'ensemble des calculs à effectuer pour fixer définitivement les formes et dimensions d'une arche projetée, ainsi que les poussées auxquelles l'arche devra donner naissance dans son état normal. Nous nous abstiendrons d'entrer ici dans ces détails : examinant diverses arches décrites dans les ouvrages de Perronet et Gauthey, nous prendrons, soit dans le texte, soit dans les figures qui l'accompagnent, les dimensions principales de ces arches. La quantité $h$ qui suppose la construction terminée supérieurement par un plan horizontal, tandis que le profil du pavé et des trottoirs est loin d'être rectiligne, ne peut être estimée qu'en remplaçant ce profil par une droite horizontale disposée de manière à ne pas changer la superficie de la section. Le plus souvent, en l'absence des données, nous supposerons $h$ très-voisin de $0^m,65$. L'incertitude qui affecte cette quantité affecte également les ordonnées $Y_0$ et $Y_1$, mais leur différence $f$ en est exempte.

Partant des données spéciales à chaque cas, nous nous proposerons de déterminer les constantes principales à l'aide de nos Tables, comme s'il s'agissait de faire un avant-projet. Nous suivrons dans ces calculs la marche tracée au n° 45. La comparaison des valeurs trouvées avec celles adoptées pourra donner lieu à une

courte critique : et, en ce qui concerne les arches *en anse de panier*, nous espérons que le rapprochement des résultats auxquels l'examen de chaque arche en particulier nous aura conduit, pourra jeter quelque lumière sur la question des limites qu'il convient d'assigner au surbaissement des arches de cette espèce.

### ARCHES INCOMPLÈTES, DITES *EN ARC DE CERCLE*.

#### *Pont de Valence, sur le Guadalaviar.*

Cet ouvrage, dit Gauthey, est composé de dix arches de 13 mètres d'ouverture, dont la flèche est à peine de $1^m,3$. En l'absence d'autres données, nous supposerons l'ordonnée du sommet de l'intrados égale à $1^m,69$, et nous admettrons que les matériaux dont on a pu disposer présentent une résistance au moins égale à celle des pierres de Saillancourt 2e qualité, dont le $\frac{1}{10}$ est $42^m,9$. Les données seront ainsi :

$$g = 6^m,50; \quad f = 1^m,30; \quad Y_0 = 1^m,69; \quad \mu_1 = 42^m,9,$$

d'où

$$\frac{g}{f} = 5,00; \quad \frac{Y_0}{f} = 1,3.$$

Avec ces deux derniers nombres, la Table I donne $\frac{Q^2}{f^2} = 18,961$, et l'on en déduit (valeur approchée) $Q^2 = 32,044$. On trouve ensuite par la formule (I), $\mu_0 = 41^m,551$, et, par la formule (II) (valeur approchée), $e = 0^m,793$. On tire ensuite de la Table II, $\frac{\delta(Q^2)}{e^2} = 0,3482$, d'où

$$\delta(Q^2) = 0,219$$

puis

$$Q^2 = 32,263.$$

Par la formule (V), il vient $h'' = 1^m,684$; et, en reprenant le calcul de $e$ par la formule (II) à l'aide des valeurs corrigées, on trouve

finalement $e = 0^m,7986$. La valeur $h = 0^m,885$ qui en résulte n'est pas trop faible. Cette quantité pouvant, en pratique, recevoir une moindre valeur, on en conclut que le pont de Valence aurait pu être construit avec des matériaux moins résistants que nous ne l'avons supposé : les épaisseurs auraient alors reçu un accroissement égal à la réduction de l'ordonnée $h$.

*Pont de Pont-Sainte-Maxence, sur l'Oise.*

Ce pont, construit par Perronet, est formé de trois arches de $23^m,39$ d'ouverture et $2^m,09$ de flèche; l'épaisseur des voûtes au sommet est de $1^m,46$. Aux parements extérieurs, les voussoirs se prolongent jusqu'au plan horizontal tangent à l'extrados : nous ferons abstraction de cette particularité. Les piles, au lieu d'être pleines comme d'ordinaire, consistent en quatre colonnes de $2^m,923$ de diamètre, groupées par deux aux extrémités de chaque pile, de manière qu'il existe entre les colonnes intérieures un espace égal au diamètre de ces colonnes : en outre, les plans des têtes passent par les axes des colonnes extrêmes, de telle sorte que les moitiés extérieures des mêmes colonnes servent d'avant-becs et d'arrière-becs. La distance d'une tête à l'autre ou la largeur du pont est de $12^m,667$. D'après les dessins de Perronet, on peut admettre que l'ordonnée du sommet de l'intrados est égale à la flèche. Nous admettrons, en outre, que la hauteur $h$ ait été fixée à $0^m,65$. Les matériaux employés dans la construction des voûtes sont les pierres de Saillancourt, et des pierres des environs de Pont-Sainte-Maxence, qui ont présenté à l'essai une résistance environ quatre fois plus grande que celles de Saillancourt.

Les données sont ainsi :

$$g = 11^m,695;\ f = 2^m,09;\ Y_0 = 2^m,09;\ h = 0^m,65;\ \lambda = 12^m,667,$$

d'où
$$\frac{g}{f} = 5,60;\quad \frac{Y_0}{f} = 1,0.$$

Avec ces deux nombres, on tire de la Table I: $\frac{Q^2}{f^2} = 18,6935$,

d'où (valeur approchée) $Q^2 = 81,656$. Les formules (o) et (m) donnent (valeur approchée) $e = 1^m,44$, et l'on a, par la Table II, $\frac{\delta(Q^2)}{e^2} = 0,3422$, d'où

$$\delta(Q^2) = \underline{0,710}$$

puis

$$Q^2 = 82,366.$$

Par la formule (v), on a ensuite

$$h'' = 2^m,0813,$$

d'où

$$e = 1^m,4313.$$

Actuellement les formules (iv) donnent

$$\mu_0 = 58^m,674; \qquad \mu_1 = 60^m,838.$$

On aurait pour épaisseur réelle à la clef $\varepsilon_0 = 1^m,44$, quantité qui diffère seulement de 2 centimètres de celle adoptée par Perronet. Au reste, ce rapprochement tient uniquement au choix que nous avons fait des données $Y_0$ et $h$. Quant à la valeur de $\mu_1$, on voit qu'elle est environ $\frac{1}{9,5}$ de la résistance absolue 581 mètres des pierres de Saillancourt 1re qualité, et environ $\frac{1}{38}$ de la résistance de celles de Pont-Sainte-Maxence, d'après ce qui a été dit plus haut. Il est facile d'en conclure que si nous avions pris pour donnée $\mu_1 = 58^m,1$ à la place de $h$, nous aurions obtenu une valeur de $e$ un peu plus faible et une valeur de $h$ d'autant plus forte.

Déterminons maintenant la limite inférieure de l'épaisseur des piles. Pour cela nous aurons d'abord, par la première équation (xii),

$$q^2 = 167,960,$$

puis ensuite, par les formules (XIV),

$$y''_1 = 4^m,1641; \quad \alpha_1 = 23^\circ\ 1'.$$

On en déduit pour la largeur minimum $2e\sin\alpha_1$ à donner aux piles en leur partie supérieure, $2e\sin\alpha_1 = 1^m,119$. La charge que supportent les piles en cette partie est représentée par $\mu_1$; si l'on veut que les piles ne soient pas plus chargées à leur base, il faudra à très-peu près augmenter leur largeur d'une fraction égale au rapport de la hauteur des piles à la quantité $\mu_1$; or cette hauteur étant de $5^m,846$, il faudrait augmenter la largeur ci-dessus de la fraction $\frac{5,846}{60,838} = 0,096$, ou de $0^m,107$, ce qui porterait la limite inférieure de la largeur des piles à $1^m,226$, et la limite inférieure de la section horizontale à $1^m,226.\lambda$ ou $15^{m.q},53$. Pour comparer cette section à celle réalisée par Perronet, nous pourrons réduire à trois le nombre des colonnes qui supportent le poids des arches, à cause de la situation des colonnes extrêmes; de cette manière, la somme des sections horizontales sera $3\frac{\pi}{4}(2,923)^2 = 20^{m.q},13$. En comparant ce nombre à la limite théorique $15^{m.q},53$, on voit que le célèbre ingénieur ne s'en est écarté que de la fraction 0,296 ou environ trois dixièmes. A vrai dire, les colonnes qui servent de piles supportent une charge verticale un peu moindre que $\mu_1$, attendu que le poids des voûtes a été diminué au moyen de *lunettes* pratiquées dans le sens de la longueur du pont. Quoi qu'il en soit, on peut conclure, de la comparaison que nous venons de faire, qu'il serait suffisant d'augmenter de $\frac{1}{3}$ la largeur limite $2e\sin\alpha_1$ des piles, lorsqu'il s'agira d'établir des ponts dans des conditions comparables à celles que présente celui de Pont-Sainte-Maxence.

### *Pont de Mirepoix, sur le Lers.*

Ce pont est formé de sept arches de $19^m,5$ d'ouverture et de $2^m,612$ de flèche. Les autres données nous manquant, nous sup-

poserons l'ordonnée du sommet de l'intrados égale à $1^m,5672$, et nous admettrons que les matériaux présentent une résistance au moins égale à celle de la pierre de Saillancourt 2e qualité. En fixant la limite des charges au $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue, nous aurons le système de données suivant :

$$g = 9^m,75; \quad f = 2^m,612; \quad Y_0 = 1^m,5672; \quad \mu_1 = 42^m,9,$$

d'où $$\frac{g}{f} = 3,7328; \quad \frac{Y_0}{f} = 0,6.$$

En procédant comme dans le premier exemple, on trouvera

$$\mu_0 = 40^m,164; \quad h'' = 1^m,5607; \quad e = 0^m,9835;$$
$$h = 0^m,5772; \quad Q^2 = 38,610.$$

L'épaisseur $e$ pourra paraître un peu forte, et la charge $h$ un peu faible; pour diminuer la première et augmenter la seconde, il suffirait de faire $\mu_1$ un peu plus fort (50 mètres par exemple).

*Pont de Homps, sur l'Aude.*

Ce pont, construit par M. Ducros, se compose de trois arches de $21^m,4$ d'ouverture et de $2^m,87$ de flèche. (Nous n'aurons point égard aux petites *cornes de vache* que l'on a pratiquées dans le voisinage des têtes.) Nous compléterons les données précédentes par des nombres supposés. Soient donc

$$g = 10^m,70; \quad f = 2^m,87; \quad Y_0 = 1^m,722; \quad h = 0^m,652,$$

d'où $$\frac{g}{f} = 3,7282; \quad \frac{Y_0}{f} = 0,6;$$

on trouvera, en procédant comme dans le deuxième exemple:

$$Q^2 = 46,508; \quad h'' = 1^m,7149; \quad e = 1^m,0629;$$
$$\mu_0 = 44^m,762; \quad \mu_1 = 47^m,766.$$

La valeur de $\mu_1$ répond à $\frac{1}{9}$ environ de la résistance absolue de la pierre de Saillancourt 2e qualité, et se trouve au-dessous de $\frac{1}{12}$ de celle qui se rapporte à la 1re qualité.

*Pont de Pesmes, sur l'Ognon.*

Ce pont, construit par M. Bertrand, est composé de trois arches de $13^m,64$ d'ouverture et de $1^m,19$ de flèche; l'épaisseur à la clef adoptée dans la construction est de $1^m,19$, égale à la flèche. Comme dans les exemples précédents, nous joindrons à ces nombres des données hypothétiques; nous partirons des données suivantes :

$$g = 6^m,82; \quad f = 1^m,19; \quad Y_0 = 1^m,547; \quad h = 0^m,647,$$

d'où

$$\frac{g}{f} = 5,731; \quad \frac{Y_0}{f} = 1,3;$$

puis, en suivant la même marche que précédemment,

$$Q^2 = 35,216; \quad h'' = 1^m,5411; \quad e = 0^m,8941;$$

$$\mu_0 = 40^m,332; \quad \mu_1 = 41^m,564.$$

L'épaisseur réelle à la clef $\varepsilon_0 = 0^m,9$ qu'on en déduit est moindre de $0^m,29$ que celle adoptée dans la construction, et cependant la valeur de $\mu_1$ est inférieure au $\frac{1}{10}$ de la hauteur qui représente la résistance absolue des pierres de Saillancourt 2e qualité et de Conflans.

*Pont Fouchards, sur le Thouet, à Saumur.*

Ce pont, construit sur le projet de M. de Limay, est formé de trois arches de $25^m,99$ d'ouverture et de $2^m,635$ de flèche. Nous supposerons les données qui nous manquent. Soient

$$g = 12^m,995; \quad f = 2^m,635; \quad Y_0 = 1^m,8445; \quad \mu_1 = 62^m,5$$

(la valeur de $\mu_1$ répond à $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue de la roche douce de Bagneux); on aura d'abord

$$\frac{g}{f} = 4{,}9316; \qquad \frac{Y_0}{f} = 0{,}7;$$

puis, pour résultat final des calculs,

$$Q^2 = 75{,}409; \qquad e = 1^m{,}2827; \qquad h'' = 1^m{,}8379;$$
$$h = 0^m{,}5552; \qquad \mu_0 = 59^m{,}772.$$

On pourrait faire ici les mêmes remarques qu'à l'occasion du pont de Mirepoix.

*Pont de Saint-Diez, sur la Meurthe.*

Ce pont, construit sur les dessins de M. Lecreulx, se compose de trois arches de 12 mètres d'ouverture sur 1 mètre de flèche, et de deux petites arches latérales en plein cintre de 4 mètres d'ouverture. Nous ne nous occuperons que des premières. Les données étant encore incomplètes, nous admettrons les suivantes:

$$g = 6^m{,}0; \qquad f = 1^m{,}0; \qquad Y_0 = 1^m{,}3; \qquad h = 0^m{,}65,$$

d'où

$$\frac{g}{f} = 6{,}0; \qquad \frac{Y_0}{f} = 1{,}3.$$

Le calcul conduit aux résultats que voici :

$$Q^2 = 27{,}112; \qquad h'' = 1^m{,}2966; \qquad e = 0^m{,}6466;$$
$$\mu_0 = 42^m{,}795; \qquad \mu_1 = 43^m{,}823.$$

La valeur de $\mu_1$ répond à peu près à $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue des pierres fermes de Conflans.

*Pont de Brunoy, sur l'Hyères.*

Ce pont a été construit sur les dessins de Perronet; il se compose de trois arches de $5^m{,}846$ d'ouverture et de $0^m{,}783$ de

flèche. L'épaisseur des voûtes à la clef est de $0^m,65$; l'ordonnée du sommet de l'intrados peut être évaluée à 1 mètre et quelques centimètres. Nous prendrons cette ordonnée égale à $1^m,0179$, et la hauteur $h$ égale à $0^m,50$; en sorte que les données seront

$$g = 2^m,923; \quad f = 0^m,783; \quad Y_0 = 1^m,0179; \quad h = 0^m,50,$$

d'où $$\frac{g}{f} = 3,7331; \quad \frac{Y_0}{f} = 1,3.$$

On en déduit, par le calcul :

$$Q^2 = 6,784; \quad h'' = 1^m,0112; \quad e = 0^m,5112;$$
$$\mu_0 = 13^m,941; \quad \mu_1 = 14^m,777,$$

puis l'épaisseur réelle à la clef $\varepsilon_0 = 0^m,5179$, quantité moindre de $0^m,132$ que celle adoptée par Perronet. La valeur de $\mu_1$ répond à $\frac{1}{8,7}$ de la résistance absolue de la lambourde de qualité inférieure, et à $\frac{1}{22}$ de celle de la pierre tendre employée à Paris.

*Pont de Rosoi, sur l'Hyères.*

Ce pont a été construit, comme le précédent, sur les dessins de Perronet; il est formé de deux arches de $7^m,80$ d'ouverture et de $0^m,975$ de flèche; l'ordonnée du sommet de l'intrados est de $1^m,25$ à $1^m,30$, d'après les dessins de Perronet; l'épaisseur des voûtes à la clef a été faite de $0^m,812$, et les voussoirs sont en grès très-dur. Au lieu de supposer que l'on ait à sa disposition des matériaux aussi résistants, nous admettrons que les matériaux ne présentent pas plus de résistance que le mortier ordinaire. En prenant le $\frac{1}{10}$ seulement de la résistance absolue représentée par 219 mètres, et supposant l'ordonnée du sommet de l'intrados égale à $1^m,2675$, nous aurons pour données

$$g = 3^m,90; \quad f = 0^m,975; \quad Y_0 = 1^m,2675; \quad \mu_1 = 21^m,9,$$

d'où $\frac{g}{f} = 4,00$; $\frac{Y_0}{f} = 1,3$.

On déduit de ces nombres:

$$Q' = 11,922; \quad e = 0^m,5960; \quad h'' = 1^m,2613;$$
$$h = 0^m,6653; \quad \mu_0 = 20^m,870.$$

L'épaisseur réelle à la clef est $\varepsilon_0 = 0^m,6022$ : elle est moindre que celle adoptée par Perronet de $0^m,21$, et cependant la plus grande valeur de $\mu$ est extrêmement faible. La construction, réalisée avec des matériaux beaucoup plus résistants que nous ne l'avons supposé, présenterait donc une très-grande stabilité. La hauteur $h$ est, du reste, très-admissible dans la pratique.

*Pont de la Concorde, à Paris.*

Ce pont, construit sur les dessins de Perronet, se compose de cinq arches d'ouvertures et de flèches inégales : la chaussée est disposée en pentes qui s'étendent seulement aux quatre arches latérales; elle est de niveau dans le sens de la longueur sur l'arche du milieu seulement. Il est facile de reconnaître qu'il était impossible de substituer au projet de Perronet celui d'un pont horizontal formé de cinq arches égales, sans élever le niveau des abords ou abaisser celui des naissances d'au moins 50 à 60 centimètres. Nous nous occuperons seulement de l'arche du milieu, qui a $28^m,6$ d'ouverture et $2^m,99$ de flèche, et à laquelle on a donné $1^m,14$ d'épaisseur à la clef : supposant l'ordonnée du sommet de l'intrados égale à $1^m,794$, et la charge $h$ égale à $0^m,65$, nous aurons les données suivantes :

$$g = 14^m,30; \quad f = 2^m,99; \quad Y_0 = 1^m,794; \quad h = 0^m,65,$$

d'où $\frac{g}{f} = 4,7827$; $\frac{Y_0}{f} = 0,6$.

A l'aide de ces nombres et des précédents, on trouve la solution

$$Q^2 = 80{,}435; \quad h'' = 1^m{,}7891; \quad e = 1^m{,}1391;$$
$$\mu_0 = 71^m{,}642; \quad \mu_1 = 74^m{,}723;$$

l'épaisseur réelle à la clef s'en déduit $\varepsilon_0 = 1^m{,}144$. Cette dimension coïncide à peu près avec celle adoptée par Perronet. Quant à la valeur de $\mu_1$, elle répond à $\frac{1}{7{,}8}$ environ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt que l'on a employées dans la construction.

### ARCHES COMPLÈTES, DITES *EN ANSE DE PANIER*.

*Pont de Nogent, sur la Seine.*

Ce pont, construit par Perronet, se compose d'une seule arche de $29^m{,}24$ d'ouverture et de $8^m{,}77$ de flèche, dont la voûte est construite en grès très-dur : malgré les rampes légèrement inclinées qui conduisent au milieu, nous procéderons comme si la chaussée était exactement horizontale dans le sens de la longueur du pont. En ajoutant aux données précédentes la charge $h = 0^m{,}65$ prise hypothétiquement, les données seront

$$g = 14^m{,}62; \quad f = 8^m{,}77; \quad h = 0^m{,}65.$$

En suivant la marche indiquée n° 45, nous aurons d'abord

$$\frac{g}{f} = 1{,}6671,$$

quantité qui répond sensiblement à un surbaissement de $\frac{3}{10}$. On tire ensuite de la Table III, relativement à la valeur de $\frac{g}{f}$,

$$\frac{f}{Y_1} = 0{,}81006, \quad \text{d'où } Y_1 = 10^m{,}826;$$

et les équations (x) donnent : $h'' = 2^m{,}0443$, $e = 1^m{,}3943$; puis il vient, par les équations (xi), $\mu_0 = 42^m{,}112$; $\mu_1 = 51^m{,}776$;

et l'équation (XXIII) donne, pour la superficie du profil de la demi-arche et de la partie correspondante du massif, $\frac{V}{\lambda} = e\mu_1 = 72^{m.q},192$.

La charge représentée par $\mu_1$ est un peu faible, puisque les voussoirs ont été faits de grès très-dur; l'épaisseur est d'ailleurs peu différente de celle adoptée dans la construction, qui est de $1^m,60$ pour les voussoirs des têtes, et de $1^m,30$ pour les voussoirs intermédiaires. On eût pu diminuer l'épaisseur des voussoirs sans exagérer la charge $\mu_1$, en diminuant la flèche et élevant d'autant les naissances, afin que le sommet de l'intrados restât au même niveau. La diminution de l'épaisseur aurait ainsi permis de réduire l'inclinaison des rampes.

En effet, soit $f = 8^m,44$, ce qui revient à diminuer la flèche de $0^m,33$, et, tout en conservant la même valeur de $g$, portons la valeur de $\mu_1$ à $58^m,1$ ou au $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt 1re qualité, les données seront

$$g = 14^m,62; \quad f = 8^m,44; \quad \mu_1 = 58^m,1,$$

d'où

$$\frac{g}{f} = 1,7322.$$

On aura, par la Table III,

$$\frac{f}{Y_1} = 0,83265, \quad \text{puis } Y_1 = 10^m,136.$$

Les équations (VIII), en ayant égard à la première équation (VII), donneront $\mu_0 = 48^m,990$; $e = 1^m,0481$; et il viendra, par les formules (IX), $h'' = 1^m,6901$; $h = 0^m,6420$; puis, par l'équation (XXIII), $\frac{V}{\lambda} = 60^{m.q},894$. [La formule (IX *bis*) donnerait plus exactement $e = 1^m,0482$; on voit que la deuxième équation (VIII) est suffisamment approchée.]

Ces nombres, comparés à ceux qui résultent des données primitives, présentent une réduction de $0^m,346$ sur les épaisseurs,

ou de près de $\frac{1}{4}$ sur les premières. La surface du profil de la voûte et du massif serait réduite de plus de $\frac{1}{7}$ : il est vrai de dire que les culées devraient être élevées de $0^m,33$ de plus que dans la première solution; mais l'élévation des naissances faciliterait le débouché. La solution que nous présentons ici eût donc offert des avantages marqués sur celle adoptée par l'illustre constructeur de nos plus beaux ponts.

*Pont de Mantes, sur la Seine.*

La chaussée de ce pont formé de trois arches inégales, est disposée en rampes des deux côtés à partir du milieu; la pente est de $\frac{1}{72}$. Nous ferons abstraction de cette pente, et nous ne nous occuperons d'abord que de l'arche du milieu, dont l'ouverture et la flèche sont respectivement $38^m,98$ et $11^m,37$ : la charge $h$ peut être estimée approximativement à $0^m,74$. Les données sont ainsi:

$$g = 19^m,49; \quad f = 11^m,37; \quad h = 0^m,74;$$

d'où $\frac{g}{f} = 1,7142$, et, par la Table III, $Y_1 = 13^m,753$. En procédant comme dans l'exemple précédent, on trouve

$$h'' = 2^m,3714; \quad e = 1^m,6314; \quad \mu_0 = 58^m,075;$$
$$\mu_1 = 70^m,498; \quad \frac{V}{\lambda} = 115^{m.q},01.$$

Les pierres employées à la construction des voûtes du pont de Mantes sont celles de Saillancourt, dont la résistance absolue est représentée par 581 mètres. La valeur de $\mu_0$ coïncide avec le dixième de cette dernière quantité, tandis que celle de $\mu_1$ s'en écarte notablement : elle répond en effet à $\frac{1}{8}$ environ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt. Si, à l'exemple de beaucoup d'ingénieurs, on n'a égard qu'à la pression au sommet, on trouvera que la pierre employée présente une suffisante résis-

tance. Cela est du reste assez admissible, puisque c'est au sommet que les pressions varient le plus par l'action des surcharges accidentelles, et que ces dernières ne produisent que peu d'effet sur les voussoirs inférieurs : si donc les voussoirs peuvent résister à la charge $\mu_0$ au sommet de la voûte, et en outre à l'action des surcharges, il est vraisemblable qu'ils résisteront encore à la charge $\mu_1$ qui a lieu dans les plans des naissances, augmentée de ses très-faibles variations. Quoi qu'il en soit, il serait évidemment préférable d'employer de la pierre plus résistante.

L'épaisseur adoptée dans la construction est de $1^m,949$; mais Perronet avoue qu'on aurait pu la réduire à 5 pieds ou $1^m,624$, nombre qui coïncide à très-peu près avec la valeur $\varepsilon_0 = 1^m,6431$ que fournit notre solution. On doit remarquer que cette réduction de l'épaisseur à la clef eût permis de diminuer la pente longitudinale de la chaussée.

Actuellement nous allons examiner s'il n'eût pas été possible, sans élever les abords, de construire un pont horizontal formé de trois arches égales ayant leurs naissances au niveau de l'étiage. (Les naissances dans la construction sont à $0^m,974$ au-dessous de l'étiage.)

Les arches latérales ont $35^m,07$ d'ouverture, et les piles ont $7^m,80$ de largeur : en ajoutant au premier de ces nombres la demi-ouverture $19^m,49$ de l'arche du milieu, on a pour la demi-longueur du débouché $54^m,56$, dont le tiers donne, pour la demi-ouverture d'arches égales, $g = 18^m,1867$. La demi-longueur du pont s'obtiendra en ajoutant la largeur d'une pile à la demi-longueur du débouché, ce qui donnera $62^m,36$, et pour la pente de la chaussée, $\frac{1}{72}\,62^m,36 = 0^m,866$. La hauteur du sommet de la chaussée au-dessus du plan des naissances est égale à la longueur formée par la flèche de l'arche du milieu, l'épaisseur adoptée dans la construction et la hauteur que nous supposons équivalente à $0^m,74$ : en déduisant de cette somme la pente $0^m,866$, et la profondeur $0^m,974$ à laquelle les naissances ont été placées au-dessous de l'étiage, nous aurons la différence de niveau des

abords du pont et des naissances relevées à la hauteur de l'étiage, égale à $12^m,219 = Y_1$. L'élévation actuelle du sommet de l'intrados de l'arche du milieu au-dessus de l'étiage est d'ailleurs $11^m,37 - 0^m,974 = 10^m,396$, tandis que l'élévation des autres arches est moindre de $0^m,487$. Il importe que la solution cherchée donne une flèche peu différente de $10^m,396$, afin que le débouché ne soit pas diminué et que la navigation puisse se faire avec la même facilité.

Soient donc $g = 18^m,1867$; $Y_1 = 12^m,219$; $h = 0^m,60$, d'où $\frac{g}{Y_1} = 1,4884$. On déduit de ces données, par la Table III, $f = 10^m,301$; ce dernier nombre n'est inférieur à $10^m,396$ que de $0^m,095$, et il excède ceux qui répondent au niveau du sommet de l'intrados des arches latérales de $0^m,392$. En poursuivant le calcul, on trouve

$$h'' = 1^m,9104; \quad e = 1^m,3104; \quad \mu_0 = 57^m,052;$$
$$\mu_1 = 68^m,204; \quad \frac{V}{\lambda} = 89^{m.q},372.$$

Dans cette solution, les pressions sont un tant soit peu moindres que dans la précédente, et, quoique l'inégalité des arches ne permette pas de comparer directement les sommes des surfaces $\frac{V}{\lambda}$ des deux profils, notre solution aurait évidemment présenté une économie notable des matériaux des voûtes, indépendamment des avantages qui se rattachent à l'horizontalité de la chaussée et à l'élévation des naissances, et cela sans que le niveau des abords ait été changé.

*Pont de Neuilly, sur la Seine.*

Le pont de Neuilly, construit par Perronet, est formé de cinq arches terminées du côté des têtes par des voussures qui donnent à l'ensemble de la construction un caractère de hardiesse fort remarquable. Nous n'aurons point égard à ces voussures, qui exigeraient une théorie à part, et nous appliquerons nos formules comme s'il s'agissait d'intrados purement cylindriques. A cela

près, les arches sont en *anse de panier* surbaissée au quart; leur ouverture est de $38^m,98$, la même que celle du pont de Mantes. L'épaisseur des voûtes à la clef est de $1^m,624$, et la hauteur moyenne de charge $h$ peut être évaluée approximativement à $1^m,15$.

Quant aux pierres employées à la confection des voussoirs, elles sont de provenances diverses (*); toutefois leur qualité ne paraît pas devoir être estimée beaucoup au-dessous de celle des meilleures pierres de Saillancourt.

Soient données

$$g = 19^m,490; \quad f = 9^m,745; \quad h = 1^m,15, \quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 2;$$

on aura, par la Table III, $\frac{f}{Y_1} = 0,89759$, d'où $Y_1 = 10^m,857$; puis par les formules (x), $h'' = 1^m,112$; $e = -0^m,038$.

La valeur négative de $e$ que nous rencontrons ici, et déduite de la relation $e = h'' - h$, montre que la donnée $h$ est incompatible avec les autres. Il est visible, en effet, qu'en diminuant $h$, la valeur de $e$ deviendrait positive, mais sans pouvoir dépasser la limite $1^m,112$, ni même l'atteindre tout à fait en faisant $h = 0$.

Nous allons changer les données, en conservant cependant la demi-ouverture $g$, et nous astreignant à conserver également l'ordonnée $Y_1$ des naissances : pour calculer cette ordonnée, nous ferons la somme des trois quantités

| | |
|---|---|
| Charge approximative..... | $1^m,15$ |
| Épaisseur à la clef adoptée..... | $1\ ,624$ |
| Flèche adoptée..... | $9\ ,745$ |
| d'où | |
| Ordonnée des naissances..... $Y_1 =$ | $12^m,519$ |

(*) On trouve dans une Note jointe au *Mémoire* de Perronet *sur l'épaisseur des piles et la courbure des voûtes*, le résultat d'expériences qu'il a faites sur les pierres de Saillancourt employées par lui à la construction du pont de Neuilly. L'habile ingénieur paraît avoir fait usage des hauteurs de charge à la place des pressions par unité de surface; il dit en effet qu'il faudrait, pour opérer la rupture de la pierre en question, la charger *du poids d'une colonne de 1580 pieds de hauteur de la même pierre*. Ce nombre, ramené aux nouvelles mesures, donne $513^m,2$, résultat inférieur à celui que fournit notre tableau pour les pierres de Saillancourt 1re qualité.

Soient donc

$$g = 19^{m},490; \quad Y_1 = 12^{m},519; \quad h = 0^{m},55,$$

d'où

$$\frac{g}{Y_1} = 1,5568;$$

on en déduit, par la Table III, $f = 10^{m},731$. Ce nombre, comparé à la donnée primitive, répond à une surélévation du sommet de l'intrados d'un mètre à très-peu près : le niveau des naissances restant d'ailleurs le même qu'auparavant, il est clair que la nouvelle flèche sera plus favorable à la navigation et à l'écoulement des eaux que celle adoptée par Perronet. Il reste à voir si les avantages de la nouvelle solution se maintiendront dans les éléments qu'il nous reste à déterminer. Or, en poursuivant les calculs, on trouve

$$h'' = 1^{m},7820; \quad e = 1^{m},2320; \quad \mu_0 = 63^{m},689;$$

$$\mu_1 = 75^{m},224; \quad \frac{V}{\lambda} = 92^{m.q},67,$$

puis

$$\varepsilon_0 = 1^{m},2380.$$

Cette valeur de l'épaisseur réelle à la clef comparée à celle réalisée par Perronet présente une réduction de $0^{m},386$ ou d'à peu près un quart. Quant à la valeur de $\mu_1$, elle répond à $\frac{1}{6,8}$ ou $\frac{1}{7}$ environ de la résistance absolue 513 mètres déterminée par Perronet : pour ne faire travailler la pierre qu'au $\frac{1}{10}$, il faudrait employer la roche de Châtillon par exemple, dont la résistance absolue est représentée par 742 mètres. La valeur de $\mu_1$ est loin d'atteindre la limite indiquée par Navier; mais sans recourir à l'autorité de cet auteur, il est admissible que la solution déduite de notre théorie aurait pu être réalisée avec des matériaux un peu plus résistants que ceux employés, et, à la rigueur, avec ces derniers, si l'on se rappelle que le coefficient $\frac{1}{10}$ est proposé pour des constructions qui ne jouissent pas d'un degré de stabilité comparable à celui que nous pouvons atteindre. Les avantages de notre

solution sont assez manifestes pour que nous ne croyons pas devoir insister davantage.

*Pont d'Orléans, sur la Loire.*

Ce pont, construit sur le projet de M. Hupeau, est composé de neuf arches inégales, dont les naissances sont établies à $0^m,325$ au-dessus des basses eaux. L'arche du milieu a $32^m,484$ d'ouverture et $9^m,095$ de flèche; l'épaisseur à la clef est de $2^m,111$ pour cette arche. Quant aux autres arches, leurs dimensions sont successivement décroissantes. Les arches des culées ont $29^m,885$ d'ouverture, $8^m,121$ de flèche et $1^m,787$ d'épaisseur à la clef. La longueur totale du pont entre les culées est de $334^m,839$ : quatre des piles ont une largeur de $5^m,522$; la largeur des quatre autres est de $5^m,847$, ce qui donne, pour la largeur totale des huit piles, $45^m,476$; en sorte que le débouché des neuf arches est de $279^m,363$. La pente longitudinale du pavé du pont a été réglée de part et d'autre à $\frac{1}{108}$, d'où il suit que la différence de niveau de la chaussée au milieu du pont et à ses abords s'élève à $\frac{1}{108}\,\frac{324^m,839}{2}$ $= 1^m,504$. La hauteur de charge $h$ peut être évaluée approximativement à $0^m,85$.

Nous ferons remarquer qu'en construisant le pont d'Orléans, l'on a cru convenable de réserver, dans le massif, des cavités qui ont pour effet de diminuer la charge. Cette manière de décharger les voûtes nous paraît vicieuse dans l'application que l'on en a faite jusqu'ici. Pour concilier de semblables dispositions avec les exigences de la théorie, il faudrait que les voûtes des arches présentassent des solutions de continuité dans leur courbure, aux endroits où les naissances des voûtes en décharge s'appuient sur les reins de la voûte principale. Nous ferons abstraction de ces particularités dans ce qui va suivre, en supposant le massif plein.

Nous nous dispenserons d'étudier en particulier l'arche du milieu, et nous examinerons s'il n'aurait pas été possible d'établir à Orléans un pont horizontal formé d'arches égales et en même

nombre, sans changer les niveaux des abords du pont et des naissances. En conservant la largeur totale des piles, on a pour chacune d'elles $5^m,6845$, moyenne des largeurs inégales qui ont été adoptées dans la construction. L'ouverture d'une arche devient égale à $\frac{1}{9}\,279^m,363 = 31^m,0403$. L'ordonnée des naissances, pour l'arche du milieu, est égale à $9^m,095 + 2^m,111 + 0^m,85 = 12^m,056$; déduisant la différence de niveau $1^m,504$, nous aurons $10^m,552$ pour ordonnée des naissances, dans le pont horizontal, en conservant le niveau des abords. Nous réduirons la hauteur $h$ en la prenant, comme dans l'exemple précédent, égale à $0^m,55$. De cette manière nous aurons d'abord les données suivantes :

$$g = 15^m,5202; \qquad Y_1 = 10^m,552; \qquad h = 0^m,55,$$

d'où

$$\frac{g}{Y_1} = 1,47085.$$

On en tire, au moyen de la Table III, $f = 8^m,8542$, ce qui donne lieu au surbaissement $\frac{1}{3,5057}$. La flèche que nous déterminons ici est moindre que celle de l'arche du milieu du pont d'Orléans de $0^m,241$, et plus grande de $0^m,733$ que celle des arches extrêmes. En ayant égard à ces différences, et observant que nos intrados sont plus convexes vers les reins que ceux pratiqués jusqu'ici, on aperçoit, sans calcul, que le débouché correspondant à la valeur de $f$ que nous venons de déterminer, excède celui que présentent les arches du pont d'Orléans. Nous devons cependant constater que la réduction $0^m,241$ de la montée de l'arche dite *marinière*, bien qu'elle soit assez faible, apporterait peut-être quelques obstacles à la navigation par les hautes eaux. En poursuivant les calculs, on trouve

$$h'' = 1^m,6909; \qquad e = 1^m,1409; \qquad \mu_0 = 48^m,853;$$

$$\mu_1 = 58^m,447; \qquad \frac{V}{\lambda} = 66^{m.q},682,$$

puis

$$\varepsilon_0 = 1^m,1478.$$

L'épaisseur à la clef que nous obtenons est de beaucoup moindre que celles adoptées dans la construction, et qui varient de $2^m,111$ à $1^m,787$; la réduction dans les épaisseurs varie par conséquent de $\frac{1}{2,2}$ à $\frac{1}{2,8}$. La valeur de $\mu_1$ répond très-sensiblement au $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt 1re qualité. Nous ignorons quelle était la résistance des pierres de Mignier et de Beaugency qui ont été employées; celles de Beaugency sont signalées comme dures. Malgré le défaut d'indications plus précises, nous sommes porté à regarder la solution précédente comme offrant d'assez grands avantages sur celle adoptée.

*Pont de Gignac, sur l'Hérault (arche du milieu).*

L'arche du milieu de ce pont est surbaissée au tiers, et son ouverture est de $48^m,70$, d'où

$$g = 24^m,35; \quad f = 16^m,2333, \quad \text{et } \frac{g}{f} = 1,5.$$

En admettant ces données, on trouve par la Table III, $Y_1 = 22^m,160$, d'où $Y_1 - f$ ou $y''_1 - f = 5^m,927$. Or, on voit qu'en supposant par exemple $e$ compris entre 2 mètres et 3 mètres, $h$ serait compris entre $3^m,9$ et $2^m,9$ : ces valeurs de $h$ étant de beaucoup supérieures à la hauteur de charge strictement nécessaire, on voit qu'en admettant la valeur donnée de $f$, on serait conduit à surcharger la voûte d'une masse énorme de matériaux tout à fait inutile. L'inconvénient que nous rencontrons ici tient au surbaissement $\frac{1}{3}$, qui conduira toujours à de pareils résultats dans les arches de grande ouverture. Mais nous avons la ressource de diminuer la flèche, ce qui nécessite simplement une élévation égale du sommet des piles ou des naissances. Pour fixer les idées, nous substituerons aux données primitives les suivantes :

$$g = 24^m,35; \; f = 13^m,25; \; \mu_1 = 100^m,00, \text{ d'où } \frac{g}{f} = 1,8377.$$

A l'aide de la Table III, on en déduit $Y_1 = 15^m,3575$; puis, en achevant les calculs, il vient

$$\mu_0 = 85^m,861; \quad e = 1^m,3740; \quad h'' = 2^m,1018;$$
$$h = 0^m,7278; \quad \frac{V}{\lambda} = 137^{m.q},40.$$

En prenant $\mu_1$ moindre que 100 mètres, la valeur de $e$ croîtrait et celle de $h$ diminuerait. Nous ne donnons les chiffres précédents que pour montrer l'effet de la variation du surbaissement. Il est clair qu'en consultant certaines convenances locales, on trouverait le moyen de fixer d'une manière moins arbitraire les valeurs de $f$ et de $\mu_1$ ou $h$.

*Pont de Vizille, sur la Romanche.*

Ce pont, construit par M. Bouchet, sur la route de Grenoble à Briançon, consiste en une arche unique de $41^m,90$ d'ouverture et de $11^m,69$ de flèche. Nous supposerons la hauteur de charge $h$ égale à $0^m,66$. Les données seront ainsi

$$g = 20^m,95; \quad f = 11^m,69; \quad h = 0^m,66, \quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 1,79213.$$

Par la Table III, on en déduit $Y_1 = 13^m,7426$; et, en achevant les calculs,

$$h'' = 2^m,0454; \quad e = 1^m,3854; \quad \mu_0 = 68^m,234;$$
$$\mu_1 = 80^m,826; \quad \frac{V}{\lambda} = 111^{m.q},98,$$

puis $$\varepsilon_0 = 1^m,3926.$$

L'épaisseur adoptée dans la construction est de $1^m,95$; notre solution aurait donc permis une économie de $0^m,557$ sur l'épaisseur des voussoirs, ou de $\frac{1}{3,5}$ de l'épaisseur réalisée. La valeur de $\mu_1$ n'est pas excessive, elle supposerait l'emploi de pierres présentant

la résistance du calcaire de Jaumont 1re qualité, travaillant au $\frac{1}{10}$. La roche douce d'Arcueil employée à Paris offrirait une résistance plus que suffisante.

Le surbaissement du pont de Vizille est $\frac{1}{3,5843}$, et par conséquent assez éloigné de $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$; c'est à cette circonstance que nous devons de n'avoir pas rencontré les difficultés relatives aux données, qui se sont présentées dans quelques-uns des exemples précédents.

*Pont de Céret, sur le Tech.*

Comme presque tous les ponts qui datent de la même époque, le pont de Céret a été construit en plein cintre. Il se compose d'une seule arche de 45 mètres d'ouverture, dont les pieds-droits s'appuient contre des rochers. La forme de plein cintre a tellement exhaussé le sommet de la voûte, que l'on est obligé de franchir des pentes très-rapides pour arriver au milieu du pont. Malgré l'abondance des eaux torrentielles qui descendent des Pyrénées, il n'est guère probable que l'on ait élevé si considérablement le sommet de la voûte dans le but unique d'offrir un grand débouché à l'écoulement des eaux.

En examinant les dessins du pont de Céret, on reconnaît aisément qu'il aurait été possible d'établir à sa place un pont horizontal formé d'une arche en *anse de panier*, et de se passer des fortes rampes qui existent aux abords. Admettons, par exemple, le surbaissement $\frac{1}{3,5}$, qui donne, pour l'ouverture de 45 mètres, une flèche de $12^m,857$. Cette flèche, comparée au rayon $22^m,50$ de l'arche en plein cintre, présente une différence de $9^m,643$ dont on aurait pu abaisser le sommet de l'intrados, en conservant le même plan des naissances; en élevant les naissances d'une fraction de cette quantité, pour ne pas trop réduire la hauteur du débouché, on abaisserait le sommet de l'intrados d'une quantité égale au reste. Dans tous les cas, l'établissement des culées serait

facilité par la présence des rochers contigus. (Voir l'exemple du n° 49.)

Faisons le calcul avec les données suivantes :

$$g = 22^{m},50; \quad f = 12^{m},857; \quad h = 0^{m},65, \quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 1,75.$$

Nous trouverons, par la Table III, $Y_1 = 15^{m},338$; puis ensuite

$$h'' = 2^{m},4690; \quad e = 1^{m},8190; \quad \mu_0 = 64^{m},854;$$
$$\mu_1 = 78^{m},888; \quad \frac{V}{\lambda} = 143^{m.q},50.$$

La valeur de $e$ n'a rien d'exagéré; celle de $\mu_1$ exigerait dans les matériaux des voussoirs une résistance comprise entre celles de la roche de Châtillon et celle du calcaire de Jaumont 1re qualité. On doit prévoir assez aisément l'effet des variations de $f$ et de $h$ par rapport à $e$ et $\mu_1$, pour que nous n'insistions pas davantage sur ce sujet.

*Pont de Tours, sur la Loire.*

Ce pont est composé de quinze arches en *anse de panier* surbaissée au tiers, de $24^{m},4$ d'ouverture, ce qui donne $8^{m},1333$ de flèche; les piles ont $4^{m},87$ d'épaisseur.

Avec les données $f = 8^{m},1333$ et $\frac{g}{f} = 1,5$, on trouve, par la Table III, $Y_1 = 11^{m},103$, d'où $Y_1 - f = 2^{m},970$, quantité égale à la somme de l'épaisseur réelle à la clef et de la surcharge $h$. En prenant $h$ dans les limites usuelles, l'épaisseur serait encore très-considérable pour une assez faible ouverture, et les pressions dans les joints resteraient très-faibles, ce qui impliquerait un emploi peu économique des matériaux. La cause des inconvénients qui se présentent ici est, comme pour le pont de Gignac, dans le surbaissement $\frac{1}{3}$.

Nous pourrions obtenir une solution exempte de pareils inconvénients en diminuant la flèche des arches, ce qui permettrait d'élever les naissances et favoriserait l'écoulement des eaux, sans

que le niveau de la chaussée fût changé; nous irons plus loin. La construction du pont de Tours a été signalée par une suite de désastres paraissant avoir eu pour origine la difficulté de fonder les piles, et la facilité avec laquelle se sont produits les affouillements. Il nous semble qu'en réduisant le nombre des piles et leur largeur, on aurait réduit d'autant les difficultés du travail des fondations, et que, d'un autre côté, la largeur du débouché se trouvant augmentée, les affouillements auraient été moins à redouter. On peut objecter à cette manière de voir, que les conséquences de la chute des arches, par suite de vices de fondation des piles, seraient plus graves que dans le cas d'arches de moindres dimensions; cependant il faut reconnaître que les chances de pareils accidents seraient bien diminuées : en outre, il n'est pas impossible aujourd'hui de s'assurer que des piles établies dans des conditions déterminées pourront résister à des charges données. En nous plaçant à ce point de vue, nous proposerions de composer le pont de treize arches, et de donner aux piles 4 mètres seulement de largeur. Le débouché des quinze arches est de 366 mètres; la somme des épaisseurs des piles est de $68^{m},18$, ce qui donne une longueur totale entre les culées de $434^{m},18$. De ce nombre déduisons 48 mètres, épaisseur totale des douze piles, et nous aurons pour le nouveau débouché $386^{m},18$, nombre qui excède celui du pont de Tours de $20^{m},18$, et dont le $\frac{1}{13}$ est $29^{m},70615$. Telles seraient les dimensions des ouvertures des arches. Au lieu de nous donner la flèche, nous admettrons la condition que l'ordonnée des naissances reste la même : or, d'après les planches de l'ouvrage de Gauthey, cette ordonnée peut être évaluée à environ $10^{m},80$. Soient donc

$$g = 14^{m},8531; \quad Y_1 = 10^{m},80; \quad h = 0^{m},65;$$

on trouve la solution suivante :

$$f = 8^{m},8174; \quad h'' = 1^{m},9722; \quad e = 1^{m},3222;$$

$$\mu_0 = 44^{m},169; \quad \mu_1 = 53^{m},837; \quad \frac{V}{\lambda} = 71^{m.q},182.$$

On observera que la flèche excède celle adoptée dans la construction, de $0^m,684$; elle est donc plus favorable à la navigation et à l'écoulement des eaux. L'épaisseur ne présente rien d'exagéré, et la valeur de $\mu_1$ répond à $\frac{1}{10,8}$ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt 1re qualité. Si l'on admet que les matériaux présentent une résistance même un peu inférieure à cette dernière, la solution que nous venons d'obtenir pourra être regardée comme préférable au projet qui a servi de base à l'établissement du pont de Tours.

Quant aux piles, les nombres précédents donnent $\varepsilon_1 = 1^m,376$, dont le double est $2^m,752$ : or cette quantité est de beaucoup inférieure à la largeur 4 mètres des piles; les matériaux intérieurs des piles n'auront donc pas besoin de présenter une résistance aussi grande que celle des voussoirs, les parements extérieurs seront seuls assujettis à la condition d'être aussi résistants que les voussoirs sur une profondeur égale à l'épaisseur de ceux-ci, et encore suffira-t-il qu'il en soit ainsi vers la partie supérieure des piles.

*Pont des Chavannes, à Chalon-sur-Saône.*

Ce pont, construit par Gauthey, est composé de sept arches surbaissées au tiers, ayant 13 mètres d'ouverture, et par conséquent $4^m,3333$ de flèche. L'épaisseur des piles est de $4^m,55$. Si nous admettons que la charge au-dessus de la clef soit $0^m,65$, les données seront

$$g = 6^m,5; \quad f = 4^m,3333; \quad h = 0^m,65, \quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 1,5,$$

et l'on obtiendra la solution suivante :

$$Y_1 = 5^m,9155; \quad h'' = 1^m,5681; \quad e = 0^m,9181;$$
$$\mu_0 = 18^m,980; \quad \mu_1 = 23^m,884; \quad \frac{V}{\lambda} = 21^{m.q},928.$$

L'épaisseur est un peu forte pour des arches d'aussi faible portée; la valeur de $\mu_1$ est en même temps très-faible : les pierres de la moindre qualité présenteraient une résistance suffisante. Construites avec ces valeurs, les arches pécheraient plutôt, si cela était possible, par un excès de stabilité que par l'excès contraire.

Si le pont était à reconstruire, nous ne nous arrêterions pas aux chiffres que nous venons de trouver. On lit, en effet, dans l'ouvrage de Gauthey, page 101: « La disposition du terrain ne permettant pas d'élever suffisamment la surface du pavé du pont, les grandes eaux montent jusqu'à la clef des arches; et afin de compenser la diminution de largeur que leur débouché éprouve à mesure qu'elles s'élèvent, on a pratiqué dans la partie supérieure des piles des ouvertures ovales de $2^m,6$ de largeur. » En consultant les planches qui accompagnent le même ouvrage, on trouve que la hauteur du pavé au-dessus des naissances est de $6^m,30$ environ.

Pour obvier à l'inconvénient signalé par Gauthey, il faudrait augmenter le débouché, ce qui peut se faire de diverses manières: par exemple, en réduisant l'épaisseur des piles. Réduisons cette épaisseur à $3^m,50$, les six piles donneront un accroissement de débouché égal à $6.1^m,05 = 6^m,3$, lequel, réparti également entre les sept arches, donne pour chacune un accroissement d'ouverture égal à $0^m,9$ : les nouvelles dimensions des ouvertures seront de la sorte $13^m,90$. Nous pourrions aussi élever les naissances; mais conservons leur position et celle du niveau de la chaussée: l'ordonnée des naissances pourra être prise, d'après les dessins de Gauthey, égale à $6^m,30$ environ. En partant des nouvelles données

$$g = 6^m,95; \qquad Y_1 = 6^m,30; \qquad h = 0^m,65,$$

on trouvera la solution suivante :

$$f = 4^m,6248; \quad h'' = 1^m,6593; \quad e = 1^m,0093;$$
$$\mu_0 = 19^m,621; \quad \mu_1 = 24^m,872; \quad \frac{V}{\lambda} = 25^{m.q},104.$$

Indépendamment de l'accroissement du débouché dû à la réduction de la largeur des piles, la flèche que nous trouvons ici, et qui excède celle adoptée de $0^m,291$, détermine un nouvel accroissement du débouché; et l'on aperçoit, sans calcul, que l'accroissement total excède de beaucoup celui qui est dû aux ouvertures pratiquées au sommet des piles. Les considérations présentées dans l'exemple précédent, au sujet de la largeur des piles, sont applicables ici. L'épaisseur à la clef est très-admissible, et la valeur de $\mu_1$ excède à peine celle trouvée dans la première solution; en sorte que les pierres les moins résistantes pourraient encore être employées. La surface $\frac{V}{\lambda}$ du profil de la demi-arche et de son massif est augmentée de $\frac{1}{7}$ environ, mais cet accroissement est en partie compensé par la diminution de largeur des piles.

Nous ne donnons pas la solution précédente comme étant la meilleure; mais elle suffit pour montrer la facilité avec laquelle il devient possible de satisfaire aux diverses conditions du problème en substituant à un surbaissement trop voisin de $\frac{1}{3}$ un autre qui soit moins éloigné de $\frac{1}{4}$.

*Pont de Neuville, sur l'Ain.*

Ce pont, construit sur le projet de M. Aubry, est formé de deux arches de $29^m,20$ d'ouverture. D'après les planches de Gauthey, la flèche paraît être égale à $\frac{1}{3,4}$ de l'ouverture. Soient

$$g = 14^m,60; \quad f = 8^m,5882; \quad h = 0^m,65,$$

on aura la solution

$$Y_1 = 10^m,4491; \quad h'' = 1^m,8523; \quad e = 1^m,2023;$$

$$\mu_0 = 45^m,431; \quad \mu_1 = 54^m,795; \quad \frac{V}{\lambda} = 65^{m.q},879.$$

Ces nombres sont réalisables, si l'on dispose de matériaux dont la résistance ne soit pas notablement inférieure à la résistance

de la pierre de Saillancourt 1re qualité. Le dessin que nous avons sous les yeux ne nous permet pas de comparer l'épaisseur adoptée dans la construction avec celle que nous venons de déterminer.

*Pont de Roanne, sur la Loire.*

Ce pont est formé de sept arches surbaissées au tiers, de $23^m,40$ d'ouverture, et, par conséquent, de $7^m,80$ de flèche. En admettant ces données, on aurait $y''_1 - f$ ou $\varepsilon_0 + h = 2^m,8478$; de sorte qu'en prenant $h$ dans les limites habituelles, l'épaisseur $\varepsilon_0$ excéderait 2 mètres, et la valeur de $\mu_1$ serait assez faible. Comme précédemment, ces résultats tiennent à ce que le surbaissement est égal à $\frac{1}{3}$.

Le niveau de la chaussée paraît, d'après les dessins de Gauthey, supérieur au sommet de l'intrados d'environ $1^m,7$. En conservant le niveau de la chaussée, nous nous proposerons de réduire la flèche en nous astreignant à la condition que l'ordonnée du sommet de l'intrados n'excède pas $1^m,7$. L'élévation des naissances qui en résultera favorisera l'écoulement des eaux. Prenons par exemple pour nouvelles données

$$g = 11^m,70; \quad f = 7^m,00; \quad h = 0^m,65,$$

il viendra

$$Y_1 = 8^m,6242; \quad h'' = 1^m,6171; \quad e = 0^m,9671;$$
$$\mu_0 = 38^m,399; \quad \mu_1 = 46^m,021; \quad \frac{V}{\lambda} = 44^{m.q},505,$$

puis $\varepsilon_0 = 0^m,9742$. L'ordonnée du sommet de l'intrados réel est $\varepsilon_0 + h = 1^m,6242$, quantité un peu moindre que $1^m,7$ : ainsi notre solution exhausse le sommet des arches de $0^m,076$. Quant aux naissances, leur ordonnée se trouve être, au pont de Roanne, égale à $1^m,7 + 7^m,8 = 9^m,5$ : or nous trouvons $Y_1 = 8^m,624$; les naissances sont donc exhaussées de $0^m,876$ dans notre solu-

tion. La valeur de $\mu_1$ répond à $\frac{1}{12,6}$ de la résistance absolue de la pierre de Saillancourt 1re qualité, et à $\frac{1}{9,5}$ environ de celle de la pierre ferme de Conflans. Les nombres que nous venons d'obtenir seraient réalisables; peut-être même l'accroissement de débouché dû à l'exhaussement du sommet et des naissances de l'intrados eût-il suffi pour éviter la ruine du pont de Roanne survenue pendant la terrible inondation qui a désolé les populations riveraines de la Loire, dans l'hiver de 1846-47. Mais on aurait évité plus sûrement les effets désastreux des grandes crues, en construisant les arches de ce pont dans le système de celles que nous nommons *arches incomplètes*.

*Pont de Frouards, sur la Moselle.*

Ce pont, construit par M. Lecreulx, est composé de sept arches dont le surbaissement est compris « entre le tiers et le quart, » dit Gauthey, et dont les ouvertures sont de $19^m,5$. D'après les dessins de ce dernier ingénieur, le surbaissement peut être évalué à $\frac{1}{3,64}$, ou la flèche à $5^m,3571$. En partant des données

$$g = 9^m,75; \quad f = 5^m,3571, \quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 1,82,$$

on trouverait $y''_1 - f$ ou $\varepsilon_0 + h = 0^m,8851$; en sorte que la somme de l'épaisseur à la clef et de la hauteur de charge $h$ n'atteindrait pas seulement $0^m,9$. La moindre valeur admissible que l'on attribuerait à $h$ laisserait pour $\varepsilon_0$ une valeur inadmissible en raison de sa petitesse, et à laquelle répondraient d'énormes pressions dans les joints. La cause de ces inconvénients tient à ce que le surbaissement est trop voisin de $\frac{1}{4}$ : ainsi les données doivent être modifiées. En conservant l'ouverture des arches, admettons la condition que la différence de niveau des naissances et de la chaussée, qui paraît être de $7^m,35$ environ, d'après les dessins

de Gauthey, reste la même, et attribuons comme dans d'autres exemples, à la hauteur $h$, la valeur $0^m,65$; les données seront

$$g = 9^m,75; \quad Y_1 = 7^m,35; \quad h = 0^m,65;$$

au moyen de quoi, l'on aura la solution suivante :

$$f = 5^m,9073; \quad h'' = 1^m,4369; \quad e = 0^m,7869;$$
$$\mu_0 = 34^m,191; \quad \mu_1 = 40^m,605; \quad \frac{V}{\lambda} = 31^{m.q},950,$$

puis $\varepsilon_0 = 0^m,7928$.

Cette solution est plus favorable sous le rapport du débouché et de la facilité du passage des bateaux, que le projet réalisé par M. Lecreulx, puisque la flèche excède celle du pont de Frouards d'environ $0^m,55$; l'épaisseur à la clef est très-admissible, et la résistance mesurée par $\mu_1$ est $\frac{1}{10,6}$ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt 2e qualité, et $\frac{1}{10,7}$ de celle de la pierre ferme de Conflans. Le surbaissement auquel répondent les valeurs de $g$ et de $f$ est $\frac{1}{3,3009}$.

*Pont des Tuileries, à Paris, sur la Seine.*

Ce pont, construit sur les dessins de Mansard, est formé de cinq arches inégales : l'ouverture de l'arche du milieu est de $23^m,5$; celles des arches latérales sont de $22^m,2$ et $21^m,0$. La chaussée du pont forme deux rampes, et les naissances des arches sont situées à des niveaux différents. Les dimensions des flèches ne sont pas données dans Gauthey, et il est difficile de les obtenir à l'aide des planches de son ouvrage. Nous allons examiner s'il n'aurait pas été possible d'établir un pont horizontal composé d'arches égales, en satisfaisant principalement à la condition que le sommet des arches ne fût pas sensiblement moins élevé que celui de l'arche du milieu du pont des Tuileries, le niveau des abords restant le

même. La différence de niveau des abords et du sommet de l'arche du milieu paraît être d'environ $1^m,7$ à $1^m,8$, d'après les dessins de Gauthey. La somme des cinq ouvertures est $109^m,9$, dont le cinquième est $21^m,98$; essayons le surbaissement $\frac{1}{3,25}$, la flèche sera de $6^m,7632$, et en prenant $h = 0^m,65$, les données seront:

$$g = 10^m,99; \quad f = 6^m,7632; \quad h = 0^m,65.$$

A l'aide de ces nombres, on obtient la solution

$$Y_1 = 8^m,5233; \quad h'' = 1^m,7498; \quad e = 1^m,0998;$$
$$\mu_0 = 33^m,020; \quad \mu_1 = 40^m,485; \quad \frac{V}{\lambda} = 44^{m.q},524,$$

puis $\varepsilon_0 = 1^m,1102$ : il s'ensuit $\varepsilon_0 + h = 1^m,7602$. Ce nombre est compris entre les limites $1^m,7$ et $1^m,8$ que nous ont fournies les dessins de Gauthey. Autant qu'on en peut juger d'après les mêmes dessins, la position des naissances donnée par la valeur de $Y_1$ serait à peu près au niveau de celles de l'arche du milieu du pont des Tuileries. L'épaisseur que nous venons de trouver est très-admissible, et la valeur de $\mu_1$ est compatible avec l'emploi des pierres de qualité inférieure, telles que celles de Saillancourt 2e qualité et de Conflans. En supposant que les dessins de Gauthey ne nous aient point induit en erreur, on voit que notre solution présente des avantages marqués sur celle qui a été réalisée.

*Pont de Dôle, sur le Doubs.*

Ce pont, construit par M. Guéret, est composé de sept arches inégales surbaissées au tiers, dont la plus grande a $18^m,80$ d'ouverture, et, par conséquent, $6^m,2667$ de flèche. Les piles ont de $3^m,25$ à $3^m,50$ d'épaisseur. On trouve dans le Tableau général des ponts de Gauthey, que le débouché total est de $122^m,40$. D'après le dessin que donne cet auteur, on peut estimer qu'il existe une différence de niveau de $7^m,0$ à $7^m,10$ entre le niveau de la

chaussée aux abords du pont et les naissances : soit $7^m,05$. Ce nombre, comparé à la flèche de l'arche du milieu, donne $0^m,7833$ pour la différence de niveau entre celui des abords du pont et le sommet de cette même arche. Proposons-nous de déterminer les dimensions principales d'un pont horizontal formé de sept arches égales, dans lequel on conservera le niveau des abords et celui des naissances, en augmentant d'ailleurs le débouché par la réduction de la largeur des piles. La largeur moyenne de celles-ci étant de $3^m,375$, la somme pour les six piles est $20^m,25$; nous pouvons, sans hésiter, réduire la largeur de chacune d'elles à 3 mètres, ce qui augmentera le débouché de $2^m,25$, et élèvera la somme des ouvertures à $124^m,65$, dimension dont le $\frac{1}{7}$ est $17^m,807$. Prenons donc pour données

$$g = 8^m,9035; \quad Y_1 = 7^m,05; \quad h = 0^m,65;$$

nous obtiendrons la solution que voici :

$$f = 5^m,5403; \quad h'' = 1^m,5019; \quad e = 0^m,8519;$$
$$\mu_0 = 29^m,065; \quad \mu_1 = 35^m,149; \quad \frac{V}{\lambda} = 29^{m.q},943,$$

puis $\varepsilon_0 = 0^m,8597$.

Cette solution serait réalisable avec les pierres à bâtir les moins résistantes; mais elle peut pécher en ce que le sommet des arches est ici moins élevé qu'au milieu du pont de Dôle de $0^m,726$, différence des valeurs de $f$. Une telle réduction de la flèche peut être nuisible à la navigation et dangereuse dans le cas de grandes crues. On diminuerait ces inconvénients en élevant les naissances, ce qui aurait pour effet de diminuer l'épaisseur à clef et d'exiger l'emploi de matériaux plus résistants; mais il est clair que l'on ne parviendrait pas pratiquement à réduire l'ordonnée du sommet de l'intrados à $0^m,783$.

*Pont de Lavaur, sur l'Agoût.*

Ce pont, qui date seulement de 1775, est composé d'une grande arche *en anse de panier,* approchant du plein cintre, dont l'ouverture est de $48^m,7$, la même que celle de l'arche du milieu du pont de Gignac. L'épaisseur de la voûte à la clef est de près de $3^m,25$.

« Cette grande épaisseur, dit Gauthey, est une des causes des dégradations qui se sont manifestées à ce pont. Les accidents ne proviennent point, d'ailleurs, d'un manque de force de la part des culées, qui sont très-épaisses. » A cette cause, on peut, selon nous, ajouter la grande épaisseur de la surcharge.

Nous avons vu déjà que, dans le cas des grandes arches, le surbaissement $\frac{1}{3}$ entraîne des inconvénients, et que le surbaissement $\frac{1}{4}$ exige des matériaux très-résistants et de faibles épaisseurs à la clef. Les surbaissements voisins de $\frac{1}{3,5}$ réussissent bien dans les arches d'assez grandes dimensions : nous adopterons ici un surbaissement un peu plus voisin de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3,6}$; et, en prenant, comme plus haut, $0^m,65$ pour hauteur de la surcharge, nous aurons les données suivantes :

$$g = 24^m,35; \quad f = 13^m,5278; \quad h = 0^m,65.$$

Avec ces données, on obtient la solution :

$$Y_1 = 15^m,8628; \quad h'' = 2^m,3260; \quad e = 1^m,6760;$$

$$\mu_0 = 75^m,222; \quad \mu_1 = 89^m,841; \quad \frac{V}{\lambda} = 150^{m.q},57,$$

puis $\varepsilon_0 = 1^m,6850$.

La flèche adoptée dans la construction paraît être de 21 à 22 mètres. La réduction que nous lui faisons subir exigerait un exhaussement des naissances d'au moins $7^m,5$, si le sommet de

l'intrados devait être maintenu à la même hauteur. En l'absence de renseignements suffisamment exacts sur le niveau de la chaussée et la nécessité de le maintenir, ou la convenance qu'il aurait pu y avoir de l'abaisser, nous ne discuterons pas la valeur de $Y_1$. Nous ferons remarquer que l'épaisseur réelle à la clef que nous obtenons excède, de quelques centimètres seulement, la moitié de celle qui a été adoptée. Quant à la valeur de $\mu_1$, elle montre que les voussoirs seraient soumis à des pressions pouvant atteindre le $\frac{1}{12}$ de la résistance absolue de la roche d'Arcueil, ou le $\frac{1}{9}$ de celle du calcaire de Jaumont 1re qualité.

*Pont d'Ingersheim, sur le Fecht.*

Ce pont a été construit en 1773 par M. Clinchamp, ingénieur militaire. Il se compose de trois arches *en anse de panier* dont le surbaissement est entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$, et dont les ouvertures sont de $15^m,3$ et $18^m,3$. D'après le dessin de Gauthey, la chaussée serait disposée en pentes très-douces de part et d'autre du milieu du pont, et les naissances seraient à $5^m,4$ environ au-dessous du niveau de la chaussée aux abords du pont.

Si l'on fait abstraction de la légère pente pour l'arche du milieu, et que l'on parte du surbaissement $\frac{1}{4,5}$ et de l'ouverture $18^m,3$ comme données, d'où résulte $f = 4^m,0667$, on trouvera $\varepsilon_0 + h = 0^m,2909$, quantité évidemment inadmissible dans la pratique.

Si l'on se propose l'établissement d'un pont horizontal de même débouché et formé de trois arches égales, et que l'on ajoute la condition que la différence de niveau des abords du pont et des naissances soit de $5^m,4$, les données seront d'abord

$$g = 8^m,15; \qquad Y_1 = 5^m,40,$$

et l'on trouvera $f = 4^m,5762$; $\varepsilon_0 + h = 0^m,8238$. Il est évident qu'en attribuant à $h$ une valeur comprise dans les limites ordi-

naires, l'épaisseur à la clef restera encore très-petite et répondra à des pressions très-considérables dans les joints. Il suffirait d'élever les abords de quelques décimètres, pour obtenir une solution admissible en pratique. Si les exigences locales ne le permettent pas, il conviendra de renoncer aux arches *en anse de panier,* et de recourir à l'emploi des arches incomplètes. Au reste, il semble que l'ingénieur a fait quelque chose d'analogue, car en examinant le dessin du pont d'Ingersheim dans l'ouvrage de Gauthey, on reconnaît que l'intrados est formé d'un arc de cercle de grand rayon raccordé avec les pieds-droits, au moyen de deux arcs de rayons beaucoup plus petits. En prolongeant le tracé de l'arc principal jusqu'aux pieds-droits, on aurait un intrados circulaire très-peu différent, au fond, de celui dont il s'agit. La direction des plans de joint dans le voisinage des naissances peut seule établir une différence marquée entre les deux genres d'intrados : ne sachant pas au juste quelle est cette direction, il nous est impossible de dire si les arches du pont d'Ingersheim appartiennent à la classe des arches *en anse de panier* ou à celle des arches *en arc de cercle.*

*Pont de Vieille-Brioude, sur l'Allier.*

On lit dans Gauthey : « Ce pont a été bâti en 1454, par les entrepreneurs Grenier et Estone, aux frais de la dame du lieu. Il est composé d'une seule arche *en arc de cercle* de $54^m,2$ d'ouverture, et de 21 mètres de flèche. C'est la plus grande de toutes les arches qui existent en France, et probablement en Europe; elle n'a que $4^m,9$ de largeur, ainsi que les levées qui y aboutissent.

« La voûte est formée de deux rangs de voussoirs posés l'un sur l'autre, sans que l'on ait pratiqué entre eux presque aucune liaison; l'un est en pierres volcaniques, et l'autre en grès très-dur. Les pierres n'ont que $0^m,20$ à $0^m,25$ d'épaisseur sur $0^m,65$ au plus de longueur de coupe. Le pont est fondé solidement sur deux rochers qui s'élèvent au-dessus des basses eaux. »

Il est moins probable que la grandeur de la flèche ait été

fixée par la nécessité de donner de la hauteur au débouché, que par l'obligation où croyaient être beaucoup de constructeurs des siècles passés d'éviter le plus possible les formes éloignées du plein cintre. La grande hauteur de l'arche a nécessité l'établissement de rampes très-rapides qui se prolongent à une assez grande distance des deux côtés du pont. Le sommet du pavé est, d'après le dessin de Gauthey, élevé d'environ $24^m,6$ au-dessus des naissances.

Nous supposerons qu'il s'agisse de construire un pont horizontal, à une seule arche *en anse de panier* de $54^m,2$ d'ouverture, et que l'on ait à utiliser la résistance de matériaux du genre de ceux qui ont été employés au pont de Vieille-Brioude. (Les constructeurs de ce pont ont dû s'imposer une telle condition d'économie, puisque les frais ont été supportés par la *dame du lieu* et non pas par une province ou partie de province.) Nous admettrons un surbaissement voisin de $\frac{1}{4}$, soit $\frac{1}{3,8}$; et une hauteur $0^m,65$ de charge au-dessus de la clef. De cette manière, les données seront

$$g = 27^m,10; \quad f = 14^m,2633; \quad h = 0^m,65.$$

On en déduit

$$Y_1 = 16^m,2532; \quad h'' = 1^m,9853; \quad e = 1^m,3353;$$
$$\mu_0 = 98^m,976; \quad \mu_1 = 114^m,116; \quad \frac{V}{\lambda} = 151^{m.q},38,$$

puis $\varepsilon_0 = 1^m,3399$. La présence des deux rochers dont parle Gauthey, permettrait d'appliquer ici les notions que nous avons exposées au n° 49 sur l'établissement des culées. Le profil d'une culée serait un trapèze rectangle dont les bases supérieure et inférieure de niveau respectivement avec le sommet de l'extrados et les naissances, auraient des dimensions qui excèdent $\frac{0^m,65}{0,76}$ et $\frac{16^m,25}{0,76}$ ou $0^m,9$ et $21^m,4$ environ. Il est clair que la partie des rochers s'élevant au-dessus du plan des naissances serait comprise dans

la culée déterminée par ce profil, moyennant un raccordement convenable avec les maçonneries.

En supposant que la flèche trouvée laisse un débouché suffisant, on voit que l'ordonnée $16^m,25$ du plan des naissances permettrait un abaissement du sommet du pavé égal à $8^m,35$. On observera que l'épaisseur réelle à la clef $1^m,34$ excède peu la somme des épaisseurs des deux rangs de voussoirs; laquelle serait $1^m,30$ au plus, selon Gauthey. Enfin la valeur de $\mu_1$ est très-loin d'atteindre le $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue des pierres volcaniques et des grès durs; elle répond à $\frac{1}{9,5}$ de celle de la roche d'Arcueil.

La solution que nous venons de trouver, bien que s'écartant un peu des habitudes actuelles des ingénieurs, nous paraît très-admissible dans les conditions d'économie que nous nous sommes imposées. Hors de ces conditions, il eût été facile, en augmentant la flèche de quelques décimètres, d'obtenir des épaisseurs plus considérables, sous de moindres pressions.

### REMARQUES RELATIVES AUX ARCHES DE PONT *EN ANSE DE PANIER*.

51. Nous venons de passer en revue un assez grand nombre de ponts actuellement existants, et nous avons fait l'application de notre théorie aux données relatives à ces ponts, comme s'il se fût agi de procéder à leur construction. Dans beaucoup de cas, les résultats du calcul appliqué aux arches *en anse de panier* nous ont montré une incompatibilité entre les données, et nous avons été obligé de les modifier, pour arriver à la détermination d'un système d'éléments de construction qui pût satisfaire à la fois aux conditions d'une très-grande stabilité et aux exigences d'une économie bien entendue. En nous bornant toujours aux arches *en anse de panier* peu chargées au-dessus de la clef, ou dans lesquelles l'ordre de grandeur de la hauteur qui représente la charge est celui de l'épaisseur, il nous semble résulter des applications présentées dans le numéro précédent, et des courtes discussions auxquelles elles ont donné lieu, quelques conséquences importantes.

1° *Le surbaissement des arches complètes doit rester compris entre le tiers et le quart, et même ne point atteindre ces limites,* du moins tant que les matériaux employés seront des pierres calcaires, même les plus résistantes. Il s'ensuit que les arches *en plein cintre* ne doivent point être adoptées dans la construction des ponts : nous avons dit ailleurs qu'elles répondent à des charges infinies au-dessus de la clef, et que les voûtes qui s'en rapprochent le plus sont celles des tunnels, en raison des charges considérables qu'elles peuvent avoir à supporter.

2° *Le surbaissement des arches complètes doit être d'autant plus voisin du tiers ou du quart, que les ouvertures sont moindres ou plus grandes.* Cette conséquence, déduite de faits particuliers, est facile à expliquer : en effet, dans les arches de pont, la hauteur $h$ de la charge au-dessus de la clef, qui sera plus généralement prise pour donnée que la quantité $\mu_1$, peut être regardée comme indépendante des dimensions du pont en hauteur et largeur; elle ne dépend que de la nature et de l'emploi des matériaux qui composent la chaussée. La hauteur $h$ est donc une grandeur absolue très-peu variable et qui se trouve, dès lors, être une fraction des autres dimensions, d'autant plus grande, que celles-ci sont moindres. Or nous savons que les formes d'arches doivent se rapprocher du *plein cintre* à mesure que les hauteurs de charge sont plus considérables (et il faut entendre ici les hauteurs relatives); donc, la forme des arches *en anse de panier* doit se rapprocher d'autant plus du *plein cintre* que ces arches ont une plus faible ouverture.

Les ingénieurs sont aujourd'hui dans l'habitude d'employer les surbaissements un tiers et un quart, et le plus souvent le premier de ces rapports; mais il est rare qu'ils adoptent des nombres intermédiaires, qui seraient cependant de beaucoup préférables.

Notre théorie, envisagée dans toute sa généralité, laisse le choix entièrement arbitraire de deux données, entre les trois quantités $f$, $g$ et $Y_1$; mais, d'après ce qui vient d'être dit, les deux arbitraires doivent, dans la pratique, être assujetties à la condition que le surbaissement qui en résultera tombe entre le tiers et le quart.

Les valeurs admissibles de ce surbaissement seront, dans chaque cas, assez peu variables, pour que l'on soit tenté de regarder le rapport des deux arbitraires restantes comme ne pouvant pas être donné absolument *a priori*, et de rechercher, ailleurs que dans les circonstances locales, les raisons de ce rapport. Développons notre pensée.

Jusqu'ici nous avons considéré les arches comme soumises uniquement à l'action du poids de leurs diverses parties, et aux actions et réactions mutuelles de ces mêmes parties. C'est en ayant égard à la résistance des matériaux employés, et au peu de variabilité de la quantité $h$, que nous avons été conduit à établir les limites du surbaissement dans les arches complètes. Mais on conçoit que, si l'on tient compte en même temps des surcharges accidentelles et des chocs que les voitures lourdement chargées peuvent occasionner, on parvienne à déterminer la pression maximum par unité de surface à laquelle les voussoirs seront soumis, et qui se développera, soit dans l'état d'équilibre, soit dans l'état de vibration résultant de chocs plus ou moins répétés. Les pressions dépendront naturellement des hypothèses que l'on fera sur les surcharges et le mouvement des voitures; mais elles dépendront aussi de la constitution physique et géométrique des arches, que nous supposerons toutefois établies conformément à la théorie de l'équilibre des arches non soumises à des actions accidentelles. Or, comme nos équations laissent deux des trois quantités $f$, $g$ et $Y_1$ entièrement arbitraires, on doit profiter de cette indétermination pour satisfaire à la condition que, dans le nouvel état du système, la pression maximum qui pourra se développer n'excède point une limite donnée, l'amplitude des oscillations étant d'ailleurs supposée très-petite.

L'analyse mathématique de cette partie de la question de la stabilité des voûtes dépend de l'intégration des équations aux différences partielles, et notre intention n'est pas de l'aborder en ce moment.

A défaut d'une solution théorique, l'expérience doit être con-

sultée; mais les ponts actuellement existants ne peuvent fournir que peu de renseignements, leurs formes et dimensions relatives n'ayant point été déterminées de manière à satisfaire à nos équations. Il serait fort à désirer que l'on appliquât notre méthode à quelques-uns au moins des nombreux ponts ou viaducs dont la construction des chemins de fer exige l'établissement. Comme il est toujours possible, en faisant varier assez peu la flèche ou l'ordonnée des naissances, de ramener l'épaisseur à la clef aux dimensions usitées, qui ne dépendent que de l'ouverture, il y aurait en cela de quoi rassurer les plus timorés d'entre les ingénieurs, et, dans ce cas, l'important avantage d'obtenir la plus grande stabilité que puisse présenter une arche dont les dimensions principales sont données.

Les arches incomplètes n'étant, au fond, que des portions d'arches complètes seraient l'objet de considérations analogues à celles qui ont été présentées relativement aux restrictions que les surcharges accidentelles doivent apporter dans le choix des données; mais les arches incomplètes comprenant une arbitraire de plus, il restera toujours plus de latitude à cet égard que dans le cas des autres arches.

### RÉFLEXIONS GÉNÉRALES SUR LA THÉORIE EXPOSÉE DANS CE MÉMOIRE.

52. Les deux conditions que nous avons établies pour obtenir une très-grande stabilité dans les arches de pont, sont que la résultante des pressions dans les joints passe très-près du milieu de l'épaisseur des voussoirs, et que cette résultante soit normale aux plans de joint. Pour remplir le mieux possible la première de ces deux conditions, nous avons supposé, dans la mise en équation, les surfaces de joint réduites à celui de leurs éléments qui rencontre la *courbe des centres de gravité*, et nous avons admis que le contact étant ensuite rétabli sur des portions égales du plan de joint de part et d'autre de l'élément primitif, les pressions se répartiraient uniformément sur toute l'étendue du nouveau joint:

les défauts d'exécution des surfaces de joint ou d'homogénéité des voussoirs et des mortiers pourraient empêcher qu'il en fût ainsi; mais ce sont là des causes accidentelles. La seconde condition, relative à la direction normale de la résultante des pressions, a été remplie par le seul fait que les actions tangentielles ou frottements n'ont point été introduites dans les équations de l'équilibre : il est facile de réaliser cette condition dans la pratique, à l'aide de quelques précautions apportées dans la pose des voussoirs.

Nous avons vu comment les accidents de rupture qui se manifestent après le décintrement, dans les voûtes partiellement extradossées *en gradins*, peuvent être attribués à ce que la résultante des actions exercées par les assises sur les voussoirs est alors dirigée obliquement à l'extrados. L'indétermination des actions exercées sur la voûte dans ce genre de constructions et dans le cas où le massif est un simple blocage, jointe à des considérations théoriques, nous ont fait rechercher une disposition des matériaux formant le massif, qui, au frottement près (et il est inutile d'y avoir égard), donne lieu à des pressions normales égales à celles que produirait un liquide de même densité que le massif et soumis supérieurement à la même charge que celui-ci. C'est à cette disposition que s'appliquent ensuite nos calculs. Il n'est pas indispensable qu'elle soit réalisée en toute rigueur; il suffit, pour que nos calculs fournissent des indications satisfaisantes, que l'on supprime la disposition *en gradins*, comme le font déjà beaucoup d'ingénieurs, ou que la surface extrados soit sensiblement continue, sinon dans toute l'étendue de la voûte, du moins dans l'espace où l'inclinaison des joints avec la verticale s'étend de 18° à 75° environ.

Les résultats auxquels nous sommes parvenu (*) sont essentiel-

(*) Il ne sera pas sans intérêt de montrer jusqu'à quel point la manière abstraite dont les géomètres du siècle dernier ont traité les questions de statique, leur permettait cependant d'obtenir des solutions applicables aux cas de la pratique. Ces géomètres assimilaient l'équilibre des voûtes à celui d'un système d'éléments matériels de dimensions infiniment petites : c'est de cette manière qu'ils ont trouvé que la forme d'équilibre d'une voûte infiniment mince et d'épaisseur constante devait

lement relatifs à l'état de la voûte après le décintrement, celle-ci étant supposée soumise aux actions de son poids, de la surcharge permanente et aux réactions mutuelles de ses parties; de sorte qu'il faut encore rechercher quelle doit être la forme de la voûte sur ses cintres, pour qu'elle prenne, après leur enlèvement, la forme déterminée par la théorie que nous avons exposée. En un

---

être celle d'une chaînette renversée, lorsque la voûte est soumise uniquement à l'action de son propre poids.

Dans la question des arches de pont soumises à des forces normales dues à la pression d'un liquide, la manière de faire des anciens géomètres conduirait à des résultats identiques avec ceux qu'on déduirait de nos équations en y faisant $i = 1$, et négligeant les termes dépendants des épaisseurs autres que le terme fini $e\mu_0 = \frac{1}{2}q^2$ : l'expression ($w$) du rayon de courbure traitée ainsi, donne immédiatement

$$\rho'' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{y''}.$$

Nous avons obtenu cette équation sous une autre forme, dans notre deuxième article sur l'*Équilibre des voûtes en berceaux cylindriques*, en nous plaçant au point de vue abstrait des géomètres.

Or si l'on néglige seulement les termes du deuxième ordre dans le cas de $i = 1$, la première équation (XXIV) se réduit à

$$\rho'' = \frac{Q^2}{y''};$$

on a d'ailleurs par l'équation (VI), entre $q^2$, $Q^2$, $h''$ et $e$, la relation

$$\frac{q^2}{2} = Q^2 + h''e - \frac{2}{3}e^2;$$

d'où il suit que les deux relations précédentes seraient identiques, si les termes $h''e - \frac{2}{3}e^2$ pouvaient se réduire à zéro ou être négligés. Or, dans les arches de pont, $h''$ étant généralement supérieur à $e$ d'une fraction assez faible, le produit $h''e$ est du deuxième ordre, et l'opposition de signe de ces termes atténue l'erreur commise en les négligeant entièrement. On peut donc dire que la solution abstraite ne diffère de celle plus approchée que nous avons obtenue, que de quantités du deuxième ordre, et nous avons vu qu'en pratique ces termes sont presque négligeables. La transition de la solution abstraite à la solution pratique consisterait à

mot, la question de l'inflexion est encore à résoudre; mais elle ne nous paraît pas susceptible d'être traitée rigoureusement, si l'on n'étudie en même temps celle de l'équilibre du cintre lui-même, question dans laquelle le mode de pose des voussoirs ne devra pas être négligé. Toutefois, nous croyons avoir établi que, si l'on s'astreint aux formes que nous proposons, si l'on prend les

---

décomposer la constante $\frac{1}{2}q^2$ en un produit de deux facteurs finis $e$ et $\mu_0$, le premier étant très-petit par rapport au second, mais non pas infiniment petit.

L'assimilation faite par les anciens géomètres, de leur système idéal avec une voûte ou une arche de pont, n'était pas suffisamment justifiée *a priori*, et l'on conçoit que les ingénieurs n'aient tenu aucun compte de résultats théoriques ainsi obtenus; mais il n'en faut pas moins remarquer l'espèce d'intuition qui a permis aux premiers de poser le problème de manière à obtenir des solutions beaucoup plus approchées qu'on ne devait rationnellement s'y attendre.

La solution approchée dont il vient d'être question donne lieu à une remarque digne d'intérêt : c'est que, à ce degré d'approximation, la courbe intrados coïncide avec la courbe dite *élastique*, dans un de ses cas particuliers. Considérons, en effet, l'équilibre d'une verge élastique assujettie à la condition de couper normalement l'axe des $y$ en un point fixe dont l'ordonnée soit $h''$, et sollicitée du côté des $x$ positifs par une force P parallèle à l'axe des $x$ et de même sens que cet axe, dont l'ordonnée du point d'application soit $b''$; on aura, la concavité de la verge étant tournée du côté des $y$ positifs (voir le *Traité de Mécanique* de Poisson, 2e édition, n° 308),

$$\frac{1}{\rho''} = -\frac{P}{\beta}(b'' - y''),$$

équation où $\beta$ désigne un coefficient qui dépend des dimensions de la section transversale de la verge et du coefficient d'élasticité de la matière dont elle est formée. Les conditions d'identité de cette équation et de l'expression renversée du rayon de courbure

$$\frac{1}{\rho''} = \frac{y''}{Q^2},$$

sont

$$b'' = 0, \qquad \frac{P}{\beta} = \frac{1}{Q^2}.$$

La première indique que la force P doit être appliquée dans le plan qui limite le massif supérieurement. Cette condition est facile à remplir au moyen d'une tige rigide disposée parallèlement à l'axe des $y$ et liée invariablement à la courbe *élastique* en son extrémité libre : la force P s'appliquerait au point où cette tige rencontre l'axe des $x$. Si l'on conçoit une disposition toute pareille pour la partie de la verge située du côté des $x$ négatifs, et dans laquelle la force P soit de sens

précautions convenables dans l'exécution et la pose des voussoirs, et que, d'ailleurs, on ait le soin de ne décintrer qu'après un certain avancement, sinon l'achèvement entier du massif, l'inflexion de la voûte sera très-faible, ou du moins incomparablement plus petite que les inflexions observées jusqu'ici (*).

Quant à l'action des surcharges accidentelles et des chocs pro-

---

opposé à la première, il est évident que l'on pourra supprimer le point fixe; il y a plus : les deux forces P égales et de sens opposés pourront être remplacées par une troisième tige rigide de longueur égale à la corde qui joint les deux extrémités libres de la verge, et placée dans l'intervalle compris entre les deux premières tiges, de manière à coïncider avec l'axe des $x$. En supposant mesurée la compression qu'éprouverait la troisième tige, sa valeur P permettrait de déduire, de la seconde équation de condition, la valeur du paramètre Q de l'équation de l'intrados.

Nous ne pouvons exposer ici comment l'appareil que nous venons d'examiner pourrait être utilisé dans la résolution des questions relatives aux arches de pont, ni comment on parvient, par de simples raisonnements, à vérifier la dépendance mutuelle des trois quantités $f$, $g$ et $Y_1$ dans les arches complètes, et à distinguer le cas où ces arches se réduisent au plein cintre; chacun le devinera aisément. Mais la construction de nos Tables permettant d'obtenir une exactitude très-suffisante, le rapprochement de deux problèmes aussi différents en apparence que ceux des arches de pont et des lames élastiques n'offre plus qu'un intérêt purement spéculatif.

(*) Nous ne pouvons exposer dans ce mémoire les recherches que nous avons entreprises sur la détermination de la forme à donner aux cintres supposés parfaitement rigides, pour que le profil de la voûte, après le décintrement, devienne identique avec celui qui résulte de notre théorie, dans le cas où l'opération du décintrement serait effectuée après l'achèvement du massif : le résultat de ces recherches est trop incomplet. Nous avons pu obtenir l'expression des limites de l'accroissement de flèche qu'il conviendrait de donner aux cintres : malheureusement, on ne possède aucune notion satisfaisante sur l'élasticité des pierres à bâtir et des mortiers ou ciments. Pour nous faire une idée de l'ordre de grandeur de l'inflexion du sommet d'une arche, inflexion qui est toujours en raison inverse du coefficient d'élasticité de la matière de la voûte, nous avons été réduit à supposer que les ciments solidifiés se contractent à peu près comme les voussoirs eux-mêmes, et à prendre un coefficient d'élasticité moyen entre ceux que l'on emploie ordinairement pour le bois et la fonte de fer. En faisant l'application de nos formules et de ce coefficient moyen aux grandes arches que nous avons étudiées n^os 47 et 48, nous avons trouvé des variations de flèche notablement moindres qu'un centimètre. Ces résultats nous paraissent confirmer l'opinion énoncée dans le texte, malgré l'incertitude que présente le coefficient d'élasticité employé. Beaucoup d'ingénieurs assurément regarderaient de pareilles inflexions comme négligeables dans la pratique.

duits par le mouvement des lourdes voitures (*), nous avons vu que l'un des moyens à employer pour en prévenir les effets désastreux consiste à faire en sorte que dans l'état d'équilibre de la voûte non soumise à ces actions, la résultante des pressions passe très-près du milieu de l'épaisseur, et soit normale au plan de joint. Or notre théorie comprend déjà ces conditions. Mais il résulte des remarques du numéro précédent, que l'une des arbitraires du problème est assujettie pratiquement à rester dans des limites assez restreintes, pour qu'on doive plutôt la regarder comme une indéterminée dont on ait à profiter pour satisfaire aux nouvelles conditions statiques ou dynamiques résultant de la considération des surcharges accidentelles. Voici donc une nouvelle question à traiter dont la solution devrait précéder l'application de la théorie de l'inflexion de la voûte et de l'équilibre des cintres (**).

Tels sont les deux importants problèmes à résoudre pour que la question de l'établissement des arches de pont soit entièrement résolue : la théorie exposée dans le présent mémoire nous paraît

---

(*) Le mouvement des locomotives sur les ponts et viaducs détermine des pressions variables dues au mouvement relatif de leurs différents organes; en sorte que pour tenir compte de la surcharge qui en résulte, il faudrait connaître les valeurs de ces pressions : à cet égard, nous renverrons aux n^os 20 et 28 de notre *Théorie de la stabilité des machines locomotives en mouvement.*

(**) Ici les difficultés provenant de l'indétermination des pressions dans les joints ne pourraient être levées par le procédé qui nous a réussi lors de la mise en équation; il serait de toute nécessité d'introduire l'élasticité des voussoirs. En attendant qu'une solution rigoureuse se produise, on pourrait procéder par voie de tâtonnements. Attribuant, par exemple, à l'indéterminée dont nous avons parlé, une valeur prise entre de certaines limites, et faisant l'application de notre théorie, on examinerait, à l'aide des procédés en usage, quelles sont, pour un mode donné d'action des surcharges accidentelles, la situation du point d'application, la direction et l'intensité de la résultante des pressions en chaque joint; et l'on ferait varier l'indéterminée jusqu'à ce que l'on parvienne à des valeurs telles, que les trois éléments de la résultante des pressions restent compris dans des limites que la pratique tolère. Si l'étendue des valeurs de l'indéterminée qui satisfont à ces conditions restait sensible, on en profiterait pour choisir celle qui se rapproche le plus de la valeur donnée primitivement.

être le véritable point de départ dans l'étude de cette matière difficile.

## ADDITIONS.

### INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE L'INTRADOS FICTIF PAR LES SÉRIES.

La théorie des fonctions elliptiques n'étant connue que d'un très-petit nombre d'ingénieurs, nous présenterons ici l'expression en séries de l'équation de l'intrados fictif, pour le cas où le massif et la voûte sont supposés d'égale densité.

En faisant $i = 1$ dans les équations $(z)$ et $(a')$ (première partie du mémoire), et posant, pour abréger,

$$q''^2 = q^2 - 2h''e + \frac{4}{3}e^2, \qquad (\alpha)$$

l'équation différentielle $(a')$ peut se mettre sous la forme

$$\pm\sqrt{2}\,\frac{dx''}{q''} = \frac{1 - \dfrac{y''^2 - h''^2}{q''^2} - \dfrac{1}{3}\dfrac{e^2}{q''^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{y''^2 - h''^2}{q''^2}}}\,\frac{dy''}{\sqrt{y''^2 - h''^2}}. \qquad (\beta)$$

La quantité sous le premier radical dans le second membre, étant élevée à la puissance $-\frac{1}{2}$, l'équation $(\beta)$ devient, après de simples transformations,

$$\pm\sqrt{2}\,\frac{dx''}{q''} = \frac{d\dfrac{y''}{h''}}{\sqrt{\dfrac{y''^2}{h''^2} - 1}}\left\{\begin{array}{l} 1 - \dfrac{1}{3}\dfrac{e^2}{q''^2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{1} + \dfrac{1}{3}\dfrac{e^2}{q''^2}\right)\dfrac{h''^2}{2q''^2}\left(\dfrac{y''^2}{h''^2} - 1\right) \\ \qquad - \dfrac{1.3}{2.4}\left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{3}\dfrac{e^2}{q''^2}\right)\left(\dfrac{h''^2}{2q''^2}\right)^2\left(\dfrac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^2 \\ \qquad - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\left(\dfrac{7}{5} + \dfrac{1}{3}\dfrac{e^2}{q''^2}\right)\left(\dfrac{h''^2}{2q''^2}\right)^3\left(\dfrac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^3 \\ \qquad - \text{etc.} \end{array}\right\} (\gamma)$$

La loi de la série comprise sous les parenthèses est manifeste.

Il reste à obtenir une suite d'intégrales de même forme. Posons généralement

$$A_m = \int \left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{m-\frac{1}{2}} d\frac{y''}{h''}; \qquad (\delta)$$

au moyen des formules connues de réduction des expressions des différentielles binômes, nous aurons, entre les diverses intégrales $A_m$, la relation

$$2\,m\,A_m = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{m-\frac{1}{2}} - (2\,m - 1)\,A_{m-1}; \qquad (\varepsilon)$$

et chacune d'elles se trouvera ramenée à ne plus dépendre que de l'intégrale

$$A_0 = \int \frac{d\frac{y''}{h''}}{\sqrt{\frac{y''^2}{h''^2} - 1}} = \log\left[\frac{y''}{h''} + \sqrt{\frac{y''^2}{h''^2} - 1}\right] + \text{const.}$$

La condition que l'intégrale de l'expression $(\gamma)$ donne $x'' = 0$ pour $y'' = h''$, détermine une valeur nulle de la constante.

On peut donner à $A_0$ les formes suivantes :

$$A_0 = \log \frac{\sqrt{y''+h''} + \sqrt{y''-h''}}{\sqrt{y''+h''} - \sqrt{y''-h''}} = \log \frac{1 + \sqrt{\frac{y''-h''}{y''+h''}}}{1 - \sqrt{\frac{y''-h''}{y''+h''}}}, \qquad (\zeta)$$

dont l'identité avec la précédente se vérifie aisément. Le dernier de ces logarithmes donne, pour expression de $A_0$ en série,

$$A_0 = 2\sqrt{\frac{y''-h''}{y''+h''}}\left\{1 + \frac{1}{3}\frac{y''-h''}{y''+h''} + \frac{1}{5}\left(\frac{y''-h''}{y''+h''}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{y''-h''}{y''+h''}\right)^3 + \ldots\right\}$$

Cette série est très-convergente, lorsque $y'' - h''$ est une petite fraction de $y'' + h''$.

En faisant successivement $m = 1$, $m = 2$,... dans la relation $(\varepsilon)$, on a

$$2\,A_1 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - 1\,A_0,$$

$$4\,A_2 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} - 3\,A_1,$$

$$6\,A_3 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{5}{2}} - 5\,A_2,$$

. . . . . .

et, en substituant ces valeurs les unes dans les autres, on trouve

$$2\,A_1 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - A_0,$$

$$4\,A_2 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}A_0,$$

$$6\,A_3 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{4}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3.5}{2.4}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3.5}{2.4}A_0,$$

$$8\,A_4 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{7}{2}} - \frac{7}{6}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{5.7}{4.6}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3.5.7}{2.4.6}A_0.$$

. . . . . .

Intégrant actuellement l'expression $(\gamma)$, et supposant, comme il a été dit, $x'' = 0$ pour $y'' = h''$, il viendra

$$\left.\begin{aligned} \pm\sqrt{2}\,\frac{x''}{q''} = \left(1 - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)A_0 &- \frac{1}{2}\left(\frac{3}{1} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\frac{h''^2}{2q''^2}\,A_1, \\ &- \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\left(\frac{h''^2}{2q''^2}\right)^2 A_2, \\ &- \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{7}{5} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\left(\frac{h''^2}{2q''^2}\right)^3 A_3, \\ &\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (\eta)$$

Telle est l'une des formes que l'on peut donner à l'équation de la courbe intrados fictif, à l'aide des séries.

Les fonctions $A_0$, $A_1$, etc., sont susceptibles d'être mises sous d'autres formes. Soit, en désignant par des lettres gothiques les sinus, cosinus hyperboliques et leurs fonctions inverses,

$$\mathfrak{cos}\, A_0 = \frac{\mathfrak{y}''}{\mathfrak{k}''};$$

d'où

$$\mathfrak{sin}\, \tfrac{1}{2} A_0 = \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{y}'' - \mathfrak{k}''}{2\mathfrak{k}''}}, \qquad \mathfrak{cos}\, \tfrac{1}{2} A_0 = \sqrt{\frac{\mathfrak{y}'' + \mathfrak{k}''}{2\mathfrak{k}''}}, \tag{$\theta$}$$

puis

$$A_m = \int \mathfrak{sin}^{2m} A_0\, dA_0; \tag{$\iota$}$$

on aura les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} 2A_1 &= \mathfrak{cos}\, A_0\, \mathfrak{sin}\, A_0 - 1A_0, \\ 4A_2 &= \mathfrak{cos}\, A_0\, \mathfrak{sin}^3 A_0 - 3A_1, \\ 6A_3 &= \mathfrak{cos}\, A_0\, \mathfrak{sin}^5 A_0 - 5A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (\varkappa)$$

Ces expressions peuvent être substituées les unes dans les autres. Il y a plus : la nouvelle forme donnée à la fonction $A_m$ permet de la développer au moyen des sinus hyperboliques des multiples de $2A_0$; il suffit, pour cela, de développer $\mathfrak{sin}^{2m} A_0$ et d'intégrer après avoir tout multiplié par $dA_0$ : on trouve ainsi

$$A_m = \frac{1}{2^{2m-1}} \left\{ \frac{\mathfrak{sin}\, 2mA_0}{2m} - \frac{2m}{1} \frac{\mathfrak{sin}(2m-2)A_0}{2m-2} + \frac{2m(2m-1)}{1.2} \frac{\mathfrak{sin}(2m-4)A_0}{2m-4} - \ldots \pm \frac{1}{2} \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m} A_1 \right\}. \tag{$\lambda$}$$

Enfin, au moyen des fonctions trigonométriques, si l'on pose

$$\cos\theta = \frac{\mathfrak{k}''}{\mathfrak{y}''},$$

d'où

$$\sin\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{y''-h''}{2y''}};\quad \cos\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{y''+h''}{2y''}};\quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{y''-h''}{y''+h''}},\qquad (\mu)$$

puis

$$A_m = \int \frac{\operatorname{tang}^{2m}\theta}{\cos\theta}\,d\theta;\qquad (\nu)$$

on aura

$$2m\,A_m = \frac{\operatorname{tang}^{2m-1}\theta}{\cos\theta} - (2m-1)\,A_{m-1},$$

et, par suite,

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= \log\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta),\\
2\,A_1 &= \sec\theta\operatorname{tang}\theta - 1\,A_0,\\
4\,A_2 &= \sec\theta\operatorname{tang}^3\theta - 3\,A_1,\\
6\,A_3 &= \sec\theta\operatorname{tang}^5\theta - 5\,A_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\ (\xi)$$

L'angle $\theta$ et la fonction $A_0$, dans les formules qui dépendent des sinus hyperboliques, étant affectés du double signe, il devient inutile de conserver le signe $\pm$ qui affecte le premier membre de l'équation de l'intrados. On voit d'ailleurs clairement que la fonction $A_m$ est une fonction impaire de $\theta$ dans les formules qui contiennent les fonctions trigonométriques, et de $A_0$ dans les autres, comme cela doit être.

Les formules que nous venons de présenter auraient pu servir au calcul de notre Table I; et elles serviraient, au besoin, à en augmenter l'étendue. Toutefois, la concordance parfaite entre les résultats qu'elles fournissent et ceux qui sont consignés dans cette même table offrent une nouvelle preuve de l'exactitude de nos calculs. Donnons un exemple de l'application numérique des formules précédentes : supposons qu'il s'agisse de construire l'une des

tables dont se compose la Table I; nous exclurons les termes du deuxième ordre et nous observerons que l'équation ($\alpha$) comparée à la deuxième équation (3), n° 36, donne

$$q''^2 = 2\,Q^2; \qquad (o)$$

de cette manière, la série deviendra

$$\frac{x''}{Q} = A_0 - \frac{3}{2}\left(\frac{h''^2}{4Q^2}\right)A_1 - \frac{1}{2}\frac{5}{4}\left(\frac{h''^2}{4Q^2}\right)^2 A_2 - \frac{1.3}{2.4}\frac{7}{6}\left(\frac{h''^2}{4Q^2}\right)^3 A_3 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{9}{8}\left(\frac{h''^2}{4Q^2}\right)^4 A_4 - \text{etc.} \qquad (\varpi)$$

Au même degré d'approximation, l'on a

$$h'' = Y_0, \quad y''_1 = f + h'', \quad x''_1 = g, \quad \tang\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{f}{f+2h''}}. \qquad (\rho)$$

Si l'on se donne le rapport $\frac{Y_0}{f}$, on voit que les fonctions $A_0$, $A_1$,.. seront des constantes pour chacune des tables, et que $\frac{g}{f}$ sera une fonction de $\frac{Q}{f}$ ou de $\frac{Q^2}{f^2}$ seulement.

Soit, par exemple,

$$\frac{Y_0}{f} = 0{,}7,$$

on aura

$$\tang\tfrac{1}{2}\theta = \frac{1}{\sqrt{2{,}4}}, \text{ d'où } \tfrac{1}{2}\theta = 32^\circ\,50'\,31'',67; \ \theta = 65^\circ\,41'\,3'',35,$$

puis

$$A_0 = 1{,}5350817; \quad l.A_1 = 0{,}2832641; \quad l.A_2 = 0{,}711086;$$
$$l.A_3 = 1{,}235668; \quad l.A_4 = 1{,}80542; \quad l.A_5 = 2{,}40111.$$

A l'aide de ces valeurs, on obtient la formule

$$\begin{aligned}\frac{g}{f}\frac{f}{Q} = 1{,}5350817 &- (9{,}5474914)\frac{f^2}{Q^2} - (8{,}683238)\left(\frac{f^2}{Q^2}\right)^2 \\ &- (8{,}141054)\left(\frac{f^2}{Q^2}\right)^3 - (7{,}70397)\left(\frac{f^2}{Q^2}\right)^4 \\ &- (7{,}32004)\left(\frac{f^2}{Q^2}\right)^5 - \text{etc.},\end{aligned}$$

dans laquelle les nombres entre parenthèses sont les logarithmes des facteurs numériques dont ils tiennent la place. Cette formule permettrait de calculer avec une grande facilité la table inverse de celle qui forme la quatrième colonne de la Table I; mais elle se prêterait moins facilement au calcul de la fonction $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$ donnée dans la Table II.

En faisant, par exemple, $\frac{Q^2}{f^2} = 5,8$, les termes de la série deviendront

$$\begin{array}{r} +\ 1,5350817 \\ -\ 0,0608224 \\ -\ 0,0014334 \\ -\ 0,0000709 \\ -\ 0,0000045 \\ -\ 0,0000003 \\ \hline \text{somme} = 1,4727502 = \frac{g}{f}\frac{f}{Q}, \quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 3,546853; \end{array}$$

or ce résultat coïncide, à une unité près du dernier ordre, avec celui que nous avons obtenu en calculant nos tables à l'aide des formules du n° 36, et l'on ne pourrait pas répondre d'une unité de cet ordre, dans les calculs. Si l'on cherche dans la Table I la valeur de $\frac{g}{f}$ correspondante à $\frac{Y_0}{f} = 0,7$ et $\frac{Q^2}{f^2} = 5,8$, on trouvera $\frac{g}{f} = 3,54685$, seules figures que peut donner cette table.

L'intégrale de l'équation ($\beta$) peut encore être exprimée au moyen d'une autre série, en posant, comme dans le n° 35 *bis*,

$$\cos\alpha' = 1 - \frac{y''^2 - h''^2}{q''^2}, \qquad (\sigma)$$

d'où

$$\sin\frac{1}{2}\alpha' = \pm\sqrt{\frac{y''^2 - h''^2}{2q''^2}}, \qquad (\tau)$$

puis

$$\sin\alpha'\,d\alpha' = \frac{2y''}{q''^2}\,dy'' : \qquad (\upsilon)$$

on pourra mettre d'abord l'équation ($\beta$) sous la forme

$$\frac{dx''}{dy''} = \frac{\cos\alpha' - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}}{\sin\alpha'}, \qquad (\varphi)$$

et l'on aura, à cause de $\frac{dx''}{dy''} = \cot\alpha$,

$$\cot\alpha - \cot\alpha' = -\frac{\frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}}{\sin\alpha'},$$

d'où l'on tire aisément

$$\alpha = \alpha' + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\sin\alpha'. \qquad (\chi)$$

L'interprétation géométrique de cette relation entre les angles $\alpha$ et $\alpha'$ a été présentée dans le n° 35 *bis*. L'angle $\alpha$ se déduira avec facilité du système des équations ($\tau$) et ($\chi$).

En éliminant $y''$ et $dy''$ entre les trois équations ($\sigma$), ($\upsilon$) et ($\varphi$), et posant, pour abréger,

$$\xi = \frac{q''^2}{q''^2 + h''^2}, \qquad (\psi)$$

il vient

$$2\frac{dx''}{\sqrt{q''^2 + h''^2}} = \frac{\xi\left(\cos\alpha' - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)}{\sqrt{1 - \xi\cos\alpha'}}\,d\alpha'. \qquad (\omega)$$

Pour intégrer cette expression, ayant effectué le développement de la quantité $1 - \xi\cos\alpha'$ à la puissance $-\frac{1}{2}$, et multiplié ensuite par $\xi\left(\cos\alpha' - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)d\alpha'$, nous avons obtenu une suite de

termes de la forme $\cos^m \alpha' d\alpha'$ auxquels a été appliquée la formule de réduction

$$\int \cos^m \alpha' d\alpha' = \frac{1}{m} \sin\alpha' \cos^{m-1}\alpha' + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2}\alpha' d\alpha'.$$

Nous nous bornerons à présenter le résultat des calculs. Posant

$$\left.\begin{aligned}
C_0 &= \frac{\xi}{1}\left(1 + \frac{1.3}{2.4}\frac{2}{3}\xi^2 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{2.4}{3.5}\xi^4 + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\frac{2.4.6}{3.5.7}\xi^6 + \ldots\right)\\
C_1 &= \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{2}\left(1 + \frac{3.5}{4.6}\frac{3}{4}\xi^2 + \frac{3.5.7.9}{4.6.8.10}\frac{3.5}{4.6}\xi^4 + \ldots\right)\\
C_2 &= \frac{1.3}{2.4}\frac{\xi^3}{3}\left(1 + \frac{5.7}{6.8}\frac{4}{5}\xi^2 + \ldots\right)\\
C_3 &= \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\xi^4}{4}\left(1 + \ldots\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\} \quad (\alpha')$$

$$\left.\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}\frac{\xi}{1}\left(1 + \frac{3.5}{4.6}\frac{2}{3}\xi^2 + \frac{3.5.7.9}{4.6.8.10}\frac{2.4}{3.5}\xi^4 + \frac{3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12}\frac{2.4.6}{3.5.7}\xi^6 + \ldots\right)\\
c_1 &= \frac{1.3}{2.4}\frac{\xi^2}{2}\left(1 + \frac{5.7}{6.8}\frac{3}{4}\xi^2 + \frac{5.7.9.11}{6.8.10.12}\frac{3.5}{4.6}\xi^4 + \ldots\right)\\
c_2 &= \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\xi^3}{3}\left(1 + \frac{7.9}{8.10}\frac{4}{5}\xi^2 + \ldots\right)\\
c_3 &= \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{\xi^4}{4}\left(1 + \ldots\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\} \quad (\beta')$$

on a pour intégrale de l'équation $(\omega)$,

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{x''}{\sqrt{q''^2 + h''^2}} = {} & C_1\alpha' + C_0 \sin\alpha' + C_1 \sin\alpha' \cos\alpha' + C_2 \sin\alpha' \cos^2\alpha' + C_3 \sin\alpha' \cos^3\alpha' + \ldots\\
& - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\xi \left\{\begin{aligned}&(1 + c_1)\alpha' + c_0 \sin\alpha' + c_1 \sin\alpha' \cos\alpha'\\ &+ c_2 \sin\alpha' \cos^2\alpha' + c_3 \sin\alpha' \cos^3\alpha' + \ldots\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (\gamma')$$

La constante de l'intégration est nulle, attendu que l'on suppose $x''$ nul lorsque $y''$ est égal à $h''$. On aurait pu se proposer d'obtenir l'intégrale sous forme d'une suite de termes procédant suivant les sinus des multiples de $\alpha'$ : pour cela il eût fallu transformer les puissances de cosinus en cosinus de multiples. L'expression $(\gamma')$, qui contient l'angle $\alpha'$ en dehors des signes sinus et cosinus, met en évidence la reproduction périodique des mêmes formes de la courbe intrados : elle ne pourrait être de quelque utilité que dans les cas où la constante $\xi$ serait une fraction assez petite, comme dans ceux que présentent les tunnels et les *poitrails*.

Considérons le cas idéal où l'on supposerait l'épaisseur nulle, et la hauteur $h''$ infinie : soit $f''$ la flèche correspondante à la valeur maximum de $x''$; l'équation $(\omega)$ donne pour condition de ce maximum, $\cos\alpha' = 0$; l'équation $(\sigma)$, en y égalant son second membre à zéro, et écrivant $f'' + h''$ à la place de $y''$, fournit la valeur de la constante $q''^2$,

$$q''^2 = f''(f'' + 2h''), \qquad (\delta')$$

d'où résulte

$$q''^2 + h''^2 = (f'' + h'')^2; \qquad \xi = \frac{f''(f'' + 2h'')}{(f'' + h'')^2}. \qquad (\varepsilon')$$

La flèche $f''$ étant finie, on voit que la quantité $\xi$ est infiniment petite du premier ordre. Cette circonstance réduit l'équation $(\gamma')$ à

$$2x''\frac{f'' + h''}{f''(f'' + 2h'')} = \sin\alpha',$$

en vertu des valeurs précédentes; l'équation $(\sigma)$ donne elle-même

$$1 - \frac{(y'' - h'')(y'' + h'')}{f''(f'' + 2h'')} = \cos\alpha'.$$

Éliminant $\alpha'$ entre ces deux équations, il vient

$$4\frac{x''^2}{f''^2}\left(\frac{f'' + h''}{f'' + 2h''}\right)^2 + \left[\frac{(y'' - h'')(y'' + h'') - f''(f'' + 2h'')}{f''(f'' + 2h'')}\right]^2 = 1.$$

Or, on peut négliger ici $f''$ devant $h''$ et mettre $2h''$ à la place de $y'' + h''$, en sorte que cette équation se réduit à

$$\frac{x''^2}{f''^2} + \frac{(y'' - h'' - f'')^2}{f''^2} = 1,$$

équation qui n'est autre chose que celle d'un cercle de rayon $f''$, et dont le centre a pour ordonnée $h'' + f''$. Ce résultat était facile à prévoir, d'après ce qui a été dit plusieurs fois à l'égard des hauteurs de charge considérables.

Nous ne nous étendrons pas sur l'usage que l'on pourrait faire des expressions de $x''$ en séries; nous croyons en avoir assez dit pour que chacun, au besoin, puisse aisément tirer parti de ces développements.

### PONTS TERMINÉS PAR DES ARCHES SECONDAIRES DE DIMENSIONS GÉNÉRALEMENT MOINDRES QUE CELLES DES ARCHES PRINCIPALES.

Dans l'impossibilité d'aborder ici, sous toutes ses faces, le problème que présente l'établissement des ponts formés d'arches inégales, nous nous bornerons à des indications sommaires. Ces indications suffiront aux ingénieurs qui possèdent les notions relatives à l'établissement d'un massif de maçonnerie soumis à l'action de forces données.

Les arches principales et les arches secondaires sont séparées par une pile de largeur beaucoup plus considérable que celle des piles interposées entre les arches principales. Cette pile peut être envisagée comme faisant, en partie, fonction de culée à l'égard des deux arches inégales. Le défaut de symétrie de ces arches entraîne une complication dont la question de l'établissement des piles ordinaires se trouve exempte.

Supposons tout d'abord les diverses parties de la construction déterminées, la question à examiner sera celle de la stabilité de la pile-culée qui sépare deux arches inégales. A cet effet, considérons l'équilibre d'une portion de cette pile-culée limitée dans

le sens vertical par deux plans menés, l'un par celle des arêtes inférieures des deux extrados qui est la plus élevée, l'autre à un niveau inférieur d'une quantité quelconque au niveau le moins élevé des naissances des deux intrados, les limites dans le sens horizontal étant les plans des pieds-droits, et un plan vertical passant par l'arête inférieure la moins élevée des deux extrados, tandis que les plans de joint des naissances achèvent de déterminer la portion de la pile-culée dont il s'agit. Les forces qui sollicitent ce système considéré dans son ensemble doivent satisfaire aux conditions de l'équilibre d'un corps solide; celles d'entre elles qui sont censées connues sont : le poids des matériaux qui reposent directement sur le plan horizontal supérieur et le poids propre du système, puis les poussées exercées normalement aux plans des naissances, enfin la poussée horizontale produite par le massif contre le plan vertical mené par l'arête inférieure la moins élevée des deux intrados. Les points d'application de ces forces sont d'ailleurs également connus, en sorte que leur résultante, qui ne se réduira pas généralement à un couple, étant prise en sens contraire, déterminera la résultante des réactions exercées contre le plan inférieur dans le cas de l'équilibre. Sous le rapport de la stabilité, la direction, l'intensité et la situation des points d'application de cette force devront satisfaire à des conditions relatives à la nature des matériaux et à l'hypothèse faite sur la distribution des réactions (voir la note du n° 49). La détermination des actions intérieures qui se développent dans le système, présente des difficultés insurmontables dans l'état actuel de nos connaissances en cette matière, et l'on ne peut que recommander d'apporter dans le choix des pierres et mortiers et leur arrangement, toutes les précautions nécessaires pour que l'ensemble puisse être assimilé à un seul corps solide, lors du décintrement des arches.

Supposons que les conditions de stabilité soient remplies à l'égard du système limité inférieurement par l'assise correspondante à celle des naissances qui est la moins élevée; il sera facile,

en partant de la résultante obtenue, et au moyen des poids des assises inférieures, de construire le polygone des pressions exercées sur les surfaces de joint des diverses assises jusqu'aux fondations. Les diverses résultantes obtenues devront pouvoir satisfaire aux mêmes conditions que ci-dessus, pour que la stabilité de la pile-culée soit assurée.

Si ces conditions n'étaient pas remplies, on serait dans la nécessité de modifier une ou plusieurs des données du problème qui ne seraient pas fixées d'une manière absolue, et le sens de ces modifications serait facile à découvrir : une suite de tâtonnements, en l'absence d'un système de formules appropriées à la question, conduirait à la détermination d'un ensemble d'éléments qui satisferait aux conditions de stabilité.

Les différentes manières suivant lesquelles on groupera ceux des éléments de la construction que l'on pourra regarder comme donnés, présenteront autant de problèmes distincts, dont la solution dépendra des courtes notions que nous venons d'exposer.

---

L'auteur du mémoire qu'on vient de lire, ayant abandonné en 1846 la carrière de l'ingénieur pour entrer à l'Observatoire de Paris, s'est trouvé, par suite de l'exigence de ses nouvelles fonctions, dans l'impossibilité de continuer ses recherches sur la théorie des voûtes, et il s'est décidé à présenter la deuxième partie de son mémoire à l'Académie, quoiqu'il n'eût point encore calculé de tables relatives aux arches dites *en arc de cercle,* ni produit d'application de pareilles tables.

La nécessité de combler une telle lacune a déterminé l'auteur, au moment de l'impression du mémoire, à consacrer la partie disponible de son temps au calcul de nouvelles tables : cette

circonstance l'a empêché de réduire l'étendue de la première partie du mémoire, et de rechercher, quant à la seconde, une distribution des matières qui lui permît d'éviter les répétitions qu'on y pourrait remarquer.

# TABLES

RELATIVES

## A L'ÉTABLISSEMENT

## DES ARCHES INCOMPLÈTES, DITES *EN ARC DE CERCLE*,

ET

## DES ARCHES COMPLÈTES, OU *EN ANSE DE PANIER*.

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,4$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,5$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,6$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,7$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,8$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,50 | 3,6144 | 189 | 4,3019 | 226 | 4,9830 | 262 | 5,6600 | 297 | 6,3340 | 333 |
| 3,51 | 3,6333 | 190 | 4,3245 | 226 | 5,0092 | 262 | 5,6897 | 298 | 6,3673 | 333 |
| 3,52 | 3,6523 | 190 | 4,3471 | 227 | 5,0354 | 263 | 5,7195 | 299 | 6,4006 | 335 |
| 3,53 | 3,6713 | 190 | 4,3698 | 227 | 5,0617 | 264 | 5,7494 | 300 | 6,4341 | 336 |
| 3,54 | 3,6903 | 192 | 4,3925 | 228 | 5,0881 | 265 | 5,7794 | 301 | 6,4677 | 337 |
| 3,55 | 3,7095 | 191 | 4,4153 | 229 | 5,1146 | 265 | 5,8095 | 301 | 6,5014 | 338 |
| 3,56 | 3,7286 | 193 | 4,4382 | 229 | 5,1411 | 266 | 5,8396 | 303 | 6,5352 | 339 |
| 3,57 | 3,7479 | 192 | 4,4611 | 230 | 5,1677 | 266 | 5,8699 | 303 | 6,5691 | 339 |
| 3,58 | 3,7671 | 194 | 4,4841 | 230 | 5,1943 | 268 | 5,9002 | 305 | 6,6030 | 341 |
| 3,59 | 3,7865 | 194 | 4,5071 | 232 | 5,2211 | 268 | 5,9307 | 304 | 6,6371 | 342 |
| 3,60 | 3,8059 | 195 | 4,5303 | 232 | 5,2479 | 270 | 5,9611 | 306 | 6,6713 | 343 |
| 3,61 | 3,8254 | 194 | 4,5535 | 233 | 5,2749 | 269 | 5,9917 | 307 | 6,7056 | 343 |
| 3,62 | 3,8448 | 196 | 4,5768 | 233 | 5,3018 | 271 | 6,0224 | 308 | 6,7399 | 344 |
| 3,63 | 3,8644 | 196 | 4,6001 | 234 | 5,3289 | 271 | 6,0532 | 308 | 6,7743 | 346 |
| 3,64 | 3,8840 | 197 | 4,6235 | 234 | 5,3560 | 272 | 6,0840 | 309 | 6,8089 | 346 |
| 3,65 | 3,9037 | 197 | 4,6469 | 235 | 5,3832 | 273 | 6,1149 | 310 | 6,8435 | 347 |
| 3,66 | 3,9234 | 198 | 4,6704 | 236 | 5,4105 | 273 | 6,1459 | 312 | 6,8782 | 349 |
| 3,67 | 3,9432 | 198 | 4,6940 | 236 | 5,4378 | 274 | 6,1771 | 311 | 6,9131 | 349 |
| 3,68 | 3,9630 | 199 | 4,7176 | 238 | 5,4652 | 275 | 6,2082 | 313 | 6,9480 | 350 |
| 3,69 | 3,9829 | 199 | 4,7414 | 237 | 5,4927 | 276 | 6,2395 | 313 | 6,9830 | 352 |
| 3,70 | 4,0028 | 200 | 4,7651 | 238 | 5,5203 | 277 | 6,2708 | 315 | 7,0182 | 351 |
| 3,71 | 4,0228 | 200 | 4,7889 | 239 | 5,5480 | 277 | 6,3023 | 315 | 7,0533 | 353 |
| 3,72 | 4,0428 | 202 | 4,8128 | 240 | 5,5757 | 278 | 6,3338 | 316 | 7,0886 | 354 |
| 3,73 | 4,0630 | 201 | 4,8368 | 241 | 5,6035 | 279 | 6,3654 | 317 | 7,1240 | 355 |
| 3,74 | 4,0831 | 202 | 4,8609 | 241 | 5,6314 | 279 | 6,3971 | 318 | 7,1595 | 356 |
| 3,75 | 4,1033 | 203 | 4,8850 | 241 | 5,6593 | 280 | 6,4289 | 318 | 7,1951 | 357 |
| 3,76 | 4,1236 | 203 | 4,9091 | 242 | 5,6873 | 281 | 6,4607 | 319 | 7,2308 | 358 |
| 3,77 | 4,1439 | 204 | 4,9333 | 243 | 5,7154 | 282 | 6,4926 | 321 | 7,2666 | 359 |
| 3,78 | 4,1643 | 204 | 4,9576 | 244 | 5,7436 | 282 | 6,5247 | 321 | 7,3025 | 359 |
| 3,79 | 4,1847 | 204 | 4,9820 | 244 | 5,7718 | 283 | 6,5568 | 322 | 7,3384 | 360 |
| 3,80 | 4,2051 | | 5,0064 | | 5,8001 | | 6,5890 | | 7,3744 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,9$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,0$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,1$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,2$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,3$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,50 | 7,0059 | 368 | 7,6761 | 405 | 8,3454 | 439 | 9,0136 | 475 | 9,6810 | 510 |
| 3,51 | 7,0427 | 370 | 7,7166 | 405 | 8,3893 | 441 | 9,0611 | 476 | 9,7320 | 512 |
| 3,52 | 7,0797 | 371 | 7,7571 | 407 | 8,4334 | 442 | 9,1087 | 477 | 9,7832 | 513 |
| 3,53 | 7,1168 | 372 | 7,7978 | 408 | 8,4776 | 443 | 9,1564 | 479 | 9,8345 | 515 |
| 3,54 | 7,1540 | 372 | 7,8386 | 408 | 8,5219 | 445 | 9,2043 | 480 | 9,8860 | 516 |
| 3,55 | 7,1912 | 374 | 7,8794 | 410 | 8,5664 | 445 | 9,2523 | 482 | 9,9376 | 518 |
| 3,56 | 7,2286 | 376 | 7,9204 | 411 | 8,6109 | 447 | 9,3005 | 483 | 9,9894 | 518 |
| 3,57 | 7,2662 | 375 | 7,9615 | 412 | 8,6556 | 449 | 9,3488 | 485 | 10,0412 | 520 |
| 3,58 | 7,3037 | 377 | 8,0027 | 413 | 8,7005 | 449 | 9,3973 | 485 | 10,0932 | 522 |
| 3,59 | 7,3414 | 378 | 8,0440 | 415 | 8,7454 | 451 | 9,4458 | 487 | 10,1454 | 524 |
| 3,60 | 7,3792 | 379 | 8,0855 | 415 | 8,7905 | 452 | 9,4945 | 489 | 10,1978 | 524 |
| 3,61 | 7,4171 | 380 | 8,1270 | 417 | 8,8357 | 454 | 9,5434 | 490 | 10,2502 | 526 |
| 3,62 | 7,4551 | 382 | 8,1687 | 418 | 8,8811 | 454 | 9,5924 | 491 | 10,3028 | 528 |
| 3,63 | 7,4933 | 382 | 8,2105 | 419 | 8,9265 | 456 | 9,6415 | 492 | 10,3556 | 529 |
| 3,64 | 7,5315 | 383 | 8,2524 | 420 | 8,9721 | 457 | 9,6907 | 494 | 10,4085 | 531 |
| 3,65 | 7,5698 | 385 | 8,2944 | 422 | 9,0178 | 459 | 9,7401 | 495 | 10,4616 | 532 |
| 3,66 | 7,6083 | 385 | 8,3366 | 422 | 9,0637 | 459 | 9,7896 | 497 | 10,5148 | 533 |
| 3,67 | 7,6468 | 387 | 8,3788 | 424 | 9,1096 | 461 | 9,8393 | 498 | 10,5681 | 535 |
| 3,68 | 7,6855 | 387 | 8,4212 | 425 | 9,1557 | 462 | 9,8891 | 499 | 10,6216 | 537 |
| 3,69 | 7,7242 | 389 | 8,4637 | 426 | 9,2019 | 463 | 9,9390 | 500 | 10,6753 | 538 |
| 3,70 | 7,7631 | 389 | 8,5063 | 427 | 9,2482 | 465 | 9,9890 | 502 | 10,7291 | 539 |
| 3,71 | 7,8020 | 391 | 8,5490 | 429 | 9,2947 | 466 | 10,0392 | 504 | 10,7830 | 541 |
| 3,72 | 7,8411 | 392 | 8,5919 | 429 | 9,3413 | 467 | 10,0896 | 505 | 10,8371 | 542 |
| 3,73 | 7,8803 | 393 | 8,6348 | 431 | 9,3880 | 468 | 10,1401 | 506 | 10,8913 | 544 |
| 3,74 | 7,9196 | 394 | 8,6779 | 431 | 9,4348 | 470 | 10,1907 | 507 | 10,9457 | 545 |
| 3,75 | 7,9590 | 395 | 8,7210 | 433 | 9,4818 | 470 | 10,2414 | 508 | 11,0002 | 546 |
| 3,76 | 7,9985 | 396 | 8,7643 | 435 | 9,5288 | 472 | 10,2922 | 510 | 11,0548 | 548 |
| 3,77 | 8,0381 | 397 | 8,8078 | 435 | 9,5760 | 474 | 10,3432 | 512 | 11,1096 | 549 |
| 3,78 | 8,0778 | 398 | 8,8513 | 436 | 9,6234 | 475 | 10,3944 | 513 | 11,1645 | 551 |
| 3,79 | 8,1176 | 399 | 8,8949 | 437 | 9,6709 | 476 | 10,4457 | 514 | 11,2196 | 553 |
| 3,80 | 8,1575 | | 8,9386 | | 9,7185 | | 10,4971 | | 11,2749 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,4$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,5$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,6$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,7$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,8$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,80 | 4,2051 | 206 | 5,0064 | 245 | 5,8001 | 285 | 6,5890 | 323 | 7,3744 | 362 |
| 3,81 | 4,2257 | 205 | 5,0309 | 245 | 5,8286 | 284 | 6,6213 | 324 | 7,4106 | 363 |
| 3,82 | 4,2462 | 207 | 5,0554 | 246 | 5,8570 | 286 | 6,6537 | 324 | 7,4469 | 363 |
| 3,83 | 4,2669 | 207 | 5,0800 | 247 | 5,8856 | 286 | 6,6861 | 326 | 7,4832 | 365 |
| 3,84 | 4,2876 | 208 | 5,1047 | 248 | 5,9142 | 287 | 6,7187 | 326 | 7,5197 | 365 |
| 3,85 | 4,3084 | 207 | 5,1295 | 248 | 5,9429 | 287 | 6,7513 | 327 | 7,5562 | 367 |
| 3,86 | 4,3291 | 209 | 5,1543 | 249 | 5,9716 | 289 | 6,7840 | 328 | 7,5929 | 367 |
| 3,87 | 4,3500 | 209 | 5,1792 | 249 | 6,0005 | 289 | 6,8168 | 329 | 7,6296 | 369 |
| 3,88 | 4,3709 | 210 | 5,2041 | 250 | 6,0294 | 290 | 6,8497 | 329 | 7,6665 | 369 |
| 3,89 | 4,3919 | 210 | 5,2291 | 250 | 6,0584 | 291 | 6,8826 | 331 | 7,7034 | 370 |
| 3,90 | 4,4129 | 210 | 5,2541 | 251 | 6,0875 | 291 | 6,9157 | 331 | 7,7404 | 371 |
| 3,91 | 4,4339 | 212 | 5,2792 | 252 | 6,1166 | 293 | 6,9488 | 332 | 7,7775 | 371 |
| 3,92 | 4,4551 | 211 | 5,3044 | 253 | 6,1459 | 292 | 6,9820 | 333 | 7,8146 | 373 |
| 3,93 | 4,4762 | 212 | 5,3297 | 253 | 6,1751 | 294 | 7,0153 | 334 | 7,8519 | 374 |
| 3,94 | 4,4974 | 214 | 5,3550 | 254 | 6,2045 | 295 | 7,0487 | 335 | 7,8893 | 375 |
| 3,95 | 4,5188 | 213 | 5,3804 | 255 | 6,2340 | 295 | 7,0822 | 336 | 7,9268 | 376 |
| 3,96 | 4,5401 | 214 | 5,4059 | 255 | 6,2635 | 296 | 7,1158 | 336 | 7,9644 | 377 |
| 3,97 | 4,5615 | 215 | 5,4314 | 256 | 6,2931 | 296 | 7,1494 | 338 | 8,0021 | 378 |
| 3,98 | 4,5830 | 214 | 5,4570 | 256 | 6,3227 | 298 | 7,1832 | 338 | 8,0399 | 378 |
| 3,99 | 4,6044 | 216 | 5,4826 | 257 | 6,3525 | 298 | 7,2170 | 339 | 8,0777 | 380 |
| 4,00 | 4,6260 | 216 | 5,5083 | 258 | 6,3823 | 299 | 7,2509 | 339 | 8,1157 | 381 |
| 4,01 | 4,6476 | 217 | 5,5341 | 258 | 6,4122 | 299 | 7,2848 | 341 | 8,1538 | 381 |
| 4,02 | 4,6693 | 217 | 5,5599 | 259 | 6,4421 | 301 | 7,3189 | 342 | 8,1919 | 382 |
| 4,03 | 4,6910 | 218 | 5,5858 | 259 | 6,4722 | 301 | 7,3531 | 342 | 8,2301 | 384 |
| 4,04 | 4,7128 | 218 | 5,6117 | 261 | 6,5023 | 302 | 7,3873 | 344 | 8,2685 | 385 |
| 4,05 | 4,7346 | 219 | 5,6378 | 261 | 6,5325 | 303 | 7,4217 | 344 | 8,3070 | 385 |
| 4,06 | 4,7565 | 219 | 5,6639 | 261 | 6,5628 | 303 | 7,4561 | 345 | 8,3455 | 387 |
| 4,07 | 4,7784 | 220 | 5,6900 | 262 | 6,5931 | 304 | 7,4906 | 345 | 8,3842 | 387 |
| 4,08 | 4,8004 | 220 | 5,7162 | 263 | 6,6235 | 305 | 7,5251 | 347 | 8,4229 | 388 |
| 4,09 | 4,8224 | 221 | 5,7425 | 264 | 6,6540 | 305 | 7,5598 | 348 | 8,4617 | 389 |
| 4,10 | 4,8445 | | 5,7689 | | 6,6845 | | 7,5946 | | 8,5006 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,9$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,0$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,1$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,2$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,3$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,80 | 8,1575 | 400 | 8,9386 | 439 | 9,7185 | 477 | 10,4971 | 516 | 11,2749 | 554 |
| 3,81 | 8,1975 | 401 | 8,9825 | 440 | 9,7662 | 478 | 10,5487 | 517 | 11,3303 | 555 |
| 3,82 | 8,2376 | 402 | 9,0265 | 441 | 9,8140 | 480 | 10,6004 | 518 | 11,3858 | 557 |
| 3,83 | 8,2778 | 404 | 9,0706 | 442 | 9,8620 | 481 | 10,6522 | 519 | 11,4415 | 558 |
| 3,84 | 8,3182 | 404 | 9,1148 | 444 | 9,9101 | 482 | 10,7041 | 521 | 11,4973 | 560 |
| 3,85 | 8,3586 | 406 | 9,1592 | 444 | 9,9583 | 483 | 10,7562 | 522 | 11,5533 | 561 |
| 3,86 | 8,3992 | 406 | 9,2036 | 446 | 10,0066 | 484 | 10,8084 | 524 | 11,6094 | 563 |
| 3,87 | 8,4398 | 408 | 9,2482 | 446 | 10,0550 | 486 | 10,8608 | 525 | 11,6657 | 564 |
| 3,88 | 8,4806 | 408 | 9,2928 | 448 | 10,1036 | 488 | 10,9133 | 526 | 11,7221 | 565 |
| 3,89 | 8,5214 | 410 | 9,3376 | 449 | 10,1524 | 488 | 10,9659 | 528 | 11,7786 | 567 |
| 3,90 | 8,5624 | 411 | 9,3825 | 451 | 10,2012 | 490 | 11,0187 | 530 | 11,8353 | 569 |
| 3,91 | 8,6035 | 412 | 9,4276 | 451 | 10,2502 | 491 | 11,0717 | 530 | 11,8922 | 570 |
| 3,92 | 8,6447 | 413 | 9,4727 | 453 | 10,2993 | 492 | 11,1247 | 532 | 11,9492 | 571 |
| 3,93 | 8,6860 | 413 | 9,5180 | 453 | 10,3485 | 493 | 11,1779 | 533 | 12,0063 | 573 |
| 3,94 | 8,7273 | 415 | 9,5633 | 455 | 10,3978 | 495 | 11,2312 | 534 | 12,0636 | 574 |
| 3,95 | 8,7688 | 416 | 9,6088 | 456 | 10,4473 | 496 | 11,2846 | 536 | 12,1210 | 576 |
| 3,96 | 8,8104 | 417 | 9,6544 | 458 | 10,4969 | 497 | 11,3382 | 537 | 12,1786 | 577 |
| 3,97 | 8,8521 | 418 | 9,7002 | 458 | 10,5466 | 499 | 11,3919 | 539 | 12,2363 | 579 |
| 3,98 | 8,8939 | 419 | 9,7460 | 459 | 10,5965 | 500 | 11,4458 | 540 | 12,2942 | 580 |
| 3,99 | 8,9358 | 420 | 9,7919 | 461 | 10,6465 | 501 | 11,4998 | 541 | 12,3522 | 581 |
| 4,00 | 8,9778 | 422 | 9,8380 | 462 | 10,6966 | 502 | 11,5539 | 543 | 12,4103 | 583 |
| 4,01 | 9,0200 | 422 | 9,8842 | 462 | 10,7468 | 503 | 11,6082 | 544 | 12,4686 | 584 |
| 4,02 | 9,0622 | 424 | 9,9304 | 464 | 10,7971 | 505 | 11,6626 | 545 | 12,5270 | 586 |
| 4,03 | 9,1046 | 424 | 9,9768 | 466 | 10,8476 | 506 | 11,7171 | 547 | 12,5856 | 588 |
| 4,04 | 9,1470 | 425 | 10,0234 | 466 | 10,8982 | 507 | 11,7718 | 548 | 12,6444 | 589 |
| 4,05 | 9,1895 | 427 | 10,0700 | 468 | 10,9489 | 509 | 11,8266 | 549 | 12,7033 | 590 |
| 4,06 | 9,2322 | 428 | 10,1168 | 468 | 10,9998 | 510 | 11,8815 | 551 | 12,7623 | 592 |
| 4,07 | 9,2750 | 428 | 10,1636 | 470 | 11,0508 | 511 | 11,9366 | 552 | 12,8215 | 593 |
| 4,08 | 9,3178 | 430 | 10,2106 | 472 | 11,1019 | 512 | 11,9918 | 553 | 12,8808 | 595 |
| 4,09 | 9,3608 | 430 | 10,2578 | 472 | 11,1531 | 513 | 12,0471 | 555 | 12,9403 | 596 |
| 4,10 | 9,4038 | | 10,3050 | | 11,2044 | | 12,1026 | | 12,9999 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,4$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,5$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,6$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,7$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,8$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,10 | 4,8445 | 222 | 5,7689 | 264 | 6,6845 | 307 | 7,5946 | 348 | 8,5006 | 390 |
| 4,11 | 4,8667 | 222 | 5,7953 | 265 | 6,7152 | 307 | 7,6294 | 349 | 8,5396 | 391 |
| 4,12 | 4,8889 | 223 | 5,8218 | 266 | 6,7459 | 308 | 7,6643 | 350 | 8,5787 | 392 |
| 4,13 | 4,9112 | 223 | 5,8484 | 266 | 6,7767 | 309 | 7,6993 | 351 | 8,6179 | 393 |
| 4,14 | 4,9335 | 224 | 5,8750 | 266 | 6,8076 | 309 | 7,7344 | 351 | 8,6572 | 394 |
| 4,15 | 4,9559 | 224 | 5,9016 | 268 | 6,8385 | 310 | 7,7695 | 353 | 8,6966 | 395 |
| 4,16 | 4,9783 | 225 | 5,9284 | 268 | 6,8695 | 311 | 7,8048 | 353 | 8,7361 | 396 |
| 4,17 | 5,0008 | 225 | 5,9552 | 269 | 6,9006 | 311 | 7,8401 | 355 | 8,7757 | 397 |
| 4,18 | 5,0233 | 226 | 5,9821 | 269 | 6,9317 | 313 | 7,8756 | 355 | 8,8154 | 398 |
| 4,19 | 5,0459 | 226 | 6,0090 | 270 | 6,9630 | 313 | 7,9111 | 356 | 8,8552 | 398 |
| 4,20 | 5,0685 | 227 | 6,0360 | 270 | 6,9943 | 314 | 7,9467 | 358 | 8,8950 | 400 |
| 4,21 | 5,0912 | 228 | 6,0630 | 271 | 7,0257 | 314 | 7,9825 | 357 | 8,9350 | 400 |
| 4,22 | 5,1140 | 228 | 6,0901 | 272 | 7,0571 | 315 | 8,0182 | 358 | 8,9750 | 402 |
| 4,23 | 5,1368 | 228 | 6,1173 | 273 | 7,0886 | 316 | 8,0540 | 359 | 9,0152 | 402 |
| 4,24 | 5,1596 | 229 | 6,1446 | 273 | 7,1202 | 317 | 8,0899 | 360 | 9,0554 | 404 |
| 4,25 | 5,1825 | 230 | 6,1719 | 274 | 7,1519 | 318 | 8,1259 | 361 | 9,0958 | 404 |
| 4,26 | 5,2055 | 230 | 6,1993 | 274 | 7,1837 | 318 | 8,1620 | 363 | 9,1362 | 405 |
| 4,27 | 5,2285 | 231 | 6,2267 | 275 | 7,2155 | 319 | 8,1983 | 362 | 9,1767 | 406 |
| 4,28 | 5,2516 | 231 | 6,2542 | 276 | 7,2474 | 320 | 8,2345 | 364 | 9,2173 | 407 |
| 4,29 | 5,2747 | 232 | 6,2818 | 276 | 7,2794 | 321 | 8,2709 | 364 | 9,2580 | 409 |
| 4,30 | 5,2979 | 232 | 6,3094 | 278 | 7,3115 | 321 | 8,3073 | 366 | 9,2989 | 409 |
| 4,31 | 5,3211 | 233 | 6,3372 | 277 | 7,3436 | 322 | 8,3439 | 366 | 9,3398 | 410 |
| 4,32 | 5,3444 | 233 | 6,3649 | 278 | 7,3758 | 323 | 8,3805 | 367 | 9,3808 | 411 |
| 4,33 | 5,3677 | 234 | 6,3927 | 279 | 7,4081 | 324 | 8,4172 | 368 | 9,4219 | 412 |
| 4,34 | 5,3911 | 235 | 6,4206 | 280 | 7,4405 | 324 | 8,4540 | 368 | 9,4631 | 413 |
| 4,35 | 5,4146 | 234 | 6,4486 | 280 | 7,4729 | 325 | 8,4908 | 370 | 9,5044 | 414 |
| 4,36 | 5,4380 | 236 | 6,4766 | 281 | 7,5054 | 326 | 8,5278 | 370 | 9,5458 | 415 |
| 4,37 | 5,4616 | 236 | 6,5047 | 281 | 7,5380 | 326 | 8,5648 | 372 | 9,5873 | 416 |
| 4,38 | 5,4852 | 237 | 6,5328 | 282 | 7,5706 | 327 | 8,6020 | 372 | 9,6289 | 416 |
| 4,39 | 5,5089 | 237 | 6,5610 | 283 | 7,6033 | 328 | 8,6392 | 373 | 9,6705 | 418 |
| 4,40 | 5,5326 | | 6,5893 | | 7,6361 | | 8,6765 | | 9,7123 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,9$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,0$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,1$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,2$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,3$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,10 | 9,4038 | 432 | 10,3050 | 473 | 11,2044 | 515 | 12,1026 | 556 | 12,9999 | 597 |
| 4,11 | 9,4470 | 433 | 10,3523 | 474 | 11,2559 | 516 | 12,1582 | 558 | 13,0596 | 599 |
| 4,12 | 9,4903 | 434 | 10,3997 | 475 | 11,3075 | 517 | 12,2140 | 559 | 13,1195 | 600 |
| 4,13 | 9,5337 | 435 | 10,4472 | 477 | 11,3592 | 519 | 12,2699 | 560 | 13,1795 | 602 |
| 4,14 | 9,5772 | 436 | 10,4949 | 478 | 11,4111 | 520 | 12,3259 | 562 | 13,2397 | 604 |
| 4,15 | 9,6208 | 437 | 10,5427 | 479 | 11,4631 | 521 | 12,3821 | 563 | 13,3001 | 605 |
| 4,16 | 9,6645 | 438 | 10,5906 | 481 | 11,5152 | 522 | 12,4384 | 564 | 13,3606 | 606 |
| 4,17 | 9,7083 | 439 | 10,6387 | 481 | 11,5674 | 524 | 12,4948 | 566 | 13,4212 | 608 |
| 4,18 | 9,7522 | 440 | 10,6868 | 483 | 11,6198 | 525 | 12,5514 | 567 | 13,4820 | 609 |
| 4,19 | 9,7962 | 441 | 10,7351 | 483 | 11,6723 | 526 | 12,6081 | 569 | 13,5429 | 610 |
| 4,20 | 9,8403 | 443 | 10,7834 | 485 | 11,7249 | 527 | 12,6650 | 569 | 13,6039 | 612 |
| 4,21 | 9,8846 | 443 | 10,8319 | 486 | 11,7776 | 529 | 12,7219 | 571 | 13,6651 | 614 |
| 4,22 | 9,9289 | 444 | 10,8805 | 487 | 11,8305 | 529 | 12,7790 | 573 | 13,7265 | 615 |
| 4,23 | 9,9733 | 445 | 10,9292 | 489 | 11,8834 | 531 | 12,8363 | 574 | 13,7880 | 617 |
| 4,24 | 10,0178 | 447 | 10,9781 | 489 | 11,9365 | 533 | 12,8937 | 575 | 13,8497 | 618 |
| 4,25 | 10,0625 | 448 | 11,0270 | 491 | 11,9898 | 533 | 12,9512 | 576 | 13,9115 | 619 |
| 4,26 | 10,1073 | 449 | 11,0761 | 492 | 12,0431 | 535 | 13,0088 | 578 | 13,9734 | 621 |
| 4,27 | 10,1522 | 449 | 11,1253 | 493 | 12,0966 | 536 | 13,0666 | 579 | 14,0355 | 622 |
| 4,28 | 10,1971 | 451 | 11,1746 | 494 | 12,1502 | 538 | 13,1245 | 581 | 14,0977 | 624 |
| 4,29 | 10,2422 | 451 | 11,2240 | 495 | 12,2040 | 538 | 13,1826 | 582 | 14,1601 | 625 |
| 4,30 | 10,2873 | 453 | 11,2735 | 496 | 12,2578 | 540 | 13,2408 | 583 | 14,2226 | 627 |
| 4,31 | 10,3326 | 454 | 11,3231 | 498 | 12,3118 | 541 | 13,2991 | 585 | 14,2853 | 628 |
| 4,32 | 10,3780 | 455 | 11,3729 | 499 | 12,3659 | 543 | 13,3576 | 586 | 14,3481 | 629 |
| 4,33 | 10,4235 | 456 | 11,4228 | 499 | 12,4202 | 543 | 13,4162 | 587 | 14,4110 | 631 |
| 4,34 | 10,4691 | 457 | 11,4727 | 501 | 12,4745 | 545 | 13,4749 | 589 | 14,4741 | 633 |
| 4,35 | 10,5148 | 458 | 11,5228 | 502 | 12,5290 | 546 | 13,5338 | 590 | 14,5374 | 634 |
| 4,36 | 10,5606 | 459 | 11,5730 | 504 | 12,5836 | 548 | 13,5928 | 591 | 14,6008 | 635 |
| 4,37 | 10,6065 | 461 | 11,6234 | 504 | 12,6384 | 548 | 13,6519 | 593 | 14,6643 | 637 |
| 4,38 | 10,6526 | 461 | 11,6738 | 506 | 12,6932 | 550 | 13,7112 | 594 | 14,7280 | 639 |
| 4,39 | 10,6987 | 462 | 11,7244 | 507 | 12,7482 | 551 | 13,7706 | 596 | 14,7919 | 640 |
| 4,40 | 10,7449 | | 11,7751 | | 12,8033 | | 13,8302 | | 14,8559 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,4$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,5$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,6$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,7$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,8$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,40 | 5,5326 | 238 | 6,5893 | 284 | 7,6361 | 329 | 8,6765 | 374 | 9,7123 | 419 |
| 4,41 | 5,5564 | 238 | 6,6177 | 284 | 7,6690 | 329 | 8,7139 | 374 | 9,7542 | 419 |
| 4,42 | 5,5802 | 239 | 6,6461 | 285 | 7,7019 | 331 | 8,7513 | 376 | 9,7961 | 421 |
| 4,43 | 5,6041 | 239 | 6,6746 | 285 | 7,7350 | 331 | 8,7889 | 376 | 9,8382 | 421 |
| 4,44 | 5,6280 | 240 | 6,7031 | 286 | 7,7681 | 332 | 8,8265 | 377 | 9,8803 | 423 |
| 4,45 | 5,6520 | 240 | 6,7317 | 287 | 7,8013 | 333 | 8,8642 | 378 | 9,9226 | 423 |
| 4,46 | 5,6760 | 241 | 6,7604 | 288 | 7,8346 | 333 | 8,9020 | 380 | 9,9649 | 424 |
| 4,47 | 5,7001 | 242 | 6,7892 | 287 | 7,8679 | 334 | 8,9400 | 379 | 10,0073 | 426 |
| 4,48 | 5,7243 | 242 | 6,8179 | 289 | 7,9013 | 335 | 8,9779 | 381 | 10,0499 | 426 |
| 4,49 | 5,7485 | 243 | 6,8468 | 289 | 7,9348 | 335 | 9,0160 | 381 | 10,0925 | 427 |
| 4,50 | 5,7728 | 243 | 6,8757 | 290 | 7,9683 | 336 | 9,0541 | 382 | 10,1352 | 429 |
| 4,51 | 5,7971 | 244 | 6,9047 | 291 | 8,0019 | 337 | 9,0923 | 383 | 10,1781 | 429 |
| 4,52 | 5,8215 | 244 | 6,9338 | 291 | 8,0356 | 338 | 9,1306 | 384 | 10,2210 | 430 |
| 4,53 | 5,8459 | 244 | 6,9629 | 292 | 8,0694 | 339 | 9,1690 | 385 | 10,2640 | 430 |
| 4,54 | 5,8703 | 245 | 6,9921 | 292 | 8,1033 | 339 | 9,2075 | 386 | 10,3070 | 432 |
| 4,55 | 5,8948 | 246 | 7,0213 | 293 | 8,1372 | 340 | 9,2461 | 386 | 10,3502 | 433 |
| 4,56 | 5,9194 | 247 | 7,0506 | 294 | 8,1712 | 341 | 9,2847 | 388 | 10,3935 | 434 |
| 4,57 | 5,9441 | 247 | 7,0800 | 295 | 8,2053 | 341 | 9,3235 | 388 | 10,4369 | 435 |
| 4,58 | 5,9688 | 247 | 7,1095 | 295 | 8,2394 | 342 | 9,3623 | 389 | 10,4804 | 436 |
| 4,59 | 5,9935 | 248 | 7,1390 | 295 | 8,2736 | 344 | 9,4012 | 390 | 10,5240 | 436 |
| 4,60 | 6,0183 | 249 | 7,1685 | 297 | 8,3080 | 343 | 9,4402 | 391 | 10,5676 | 438 |
| 4,61 | 6,0432 | 249 | 7,1982 | 297 | 8,3423 | 345 | 9,4793 | 392 | 10,6114 | 439 |
| 4,62 | 6,0681 | 250 | 7,2279 | 298 | 8,3768 | 345 | 9,5185 | 392 | 10,6553 | 440 |
| 4,63 | 6,0931 | 249 | 7,2577 | 298 | 8,4113 | 346 | 9,5577 | 393 | 10,6993 | 440 |
| 4,64 | 6,1180 | 251 | 7,2875 | 298 | 8,4459 | 346 | 9,5970 | 395 | 10,7433 | 441 |
| 4,65 | 6,1431 | 251 | 7,3173 | 300 | 8,4805 | 347 | 9,6365 | 395 | 10,7874 | 443 |
| 4,66 | 6,1682 | 252 | 7,3473 | 300 | 8,5152 | 349 | 9,6760 | 396 | 10,8317 | 443 |
| 4,67 | 6,1934 | 253 | 7,3773 | 301 | 8,5501 | 349 | 9,7156 | 397 | 10,8760 | 444 |
| 4,68 | 6,2187 | 253 | 7,4074 | 302 | 8,5850 | 350 | 9,7553 | 397 | 10,9204 | 445 |
| 4,69 | 6,2440 | 253 | 7,4376 | 302 | 8,6200 | 350 | 9,7950 | 398 | 10,9649 | 447 |
| 4,70 | 6,2693 | | 7,4678 | | 8,6550 | | 9,8348 | | 11,0096 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,9$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,0$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,1$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,2$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,3$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,40 | 10,7449 | 464 | 11,7751 | 508 | 12,8033 | 553 | 13,8302 | 597 | 14,8559 | 641 |
| 4,41 | 10,7913 | 464 | 11,8259 | 508 | 12,8586 | 553 | 13,8899 | 598 | 14,9200 | 643 |
| 4,42 | 10,8377 | 465 | 11,8767 | 510 | 12,9139 | 555 | 13,9497 | 599 | 14,9843 | 644 |
| 4,43 | 10,8842 | 467 | 11,9277 | 512 | 12,9694 | 557 | 14,0096 | 601 | 15,0487 | 645 |
| 4,44 | 10,9309 | 467 | 11,9789 | 513 | 13,0251 | 557 | 14,0697 | 602 | 15,1132 | 647 |
| 4,45 | 10,9776 | 469 | 12,0302 | 513 | 13,0808 | 559 | 14,1299 | 604 | 15,1779 | 649 |
| 4,46 | 11,0245 | 470 | 12,0815 | 515 | 13,1367 | 560 | 14,1903 | 605 | 15,2428 | 650 |
| 4,47 | 11,0715 | 470 | 12,1330 | 516 | 13,1927 | 561 | 14,2508 | 607 | 15,3078 | 651 |
| 4,48 | 11,1185 | 472 | 12,1846 | 517 | 13,2488 | 562 | 14,3115 | 607 | 15,3729 | 653 |
| 4,49 | 11,1657 | 473 | 12,2363 | 518 | 13,3050 | 564 | 14,3722 | 609 | 15,4382 | 654 |
| 4,50 | 11,2130 | 474 | 12,2881 | 520 | 13,3614 | 565 | 14,4331 | 611 | 15,5036 | 656 |
| 4,51 | 11,2604 | 474 | 12,3401 | 521 | 13,4179 | 566 | 14,4942 | 612 | 15,5692 | 657 |
| 4,52 | 11,3078 | 476 | 12,3922 | 521 | 13,4745 | 568 | 14,5554 | 613 | 15,6349 | 659 |
| 4,53 | 11,3554 | 477 | 12,4443 | 523 | 13,5313 | 569 | 14,6167 | 614 | 15,7008 | 660 |
| 4,54 | 11,4031 | 478 | 12,4966 | 524 | 13,5882 | 569 | 14,6781 | 616 | 15,7668 | 662 |
| 4,55 | 11,4509 | 479 | 12,5490 | 526 | 13,6451 | 571 | 14,7397 | 617 | 15,8330 | 663 |
| 4,56 | 11,4988 | 480 | 12,6016 | 526 | 13,7022 | 573 | 14,8014 | 619 | 15,8993 | 665 |
| 4,57 | 11,5468 | 482 | 12,6542 | 527 | 13,7595 | 574 | 14,8633 | 619 | 15,9658 | 666 |
| 4,58 | 11,5950 | 482 | 12,7069 | 529 | 13,8169 | 575 | 14,9252 | 621 | 16,0324 | 667 |
| 4,59 | 11,6432 | 484 | 12,7598 | 530 | 13,8744 | 576 | 14,9873 | 623 | 16,0991 | 669 |
| 4,60 | 11,6916 | 484 | 12,8128 | 531 | 13,9320 | 578 | 15,0496 | 624 | 16,1660 | 670 |
| 4,61 | 11,7400 | 486 | 12,8659 | 533 | 13,9898 | 578 | 15,1120 | 626 | 16,2330 | 672 |
| 4,62 | 11,7886 | 486 | 12,9192 | 533 | 14,0476 | 580 | 15,1746 | 626 | 16,3002 | 673 |
| 4,63 | 11,8372 | 487 | 12,9725 | 534 | 14,1056 | 581 | 15,2372 | 628 | 16,3675 | 675 |
| 4,64 | 11,8859 | 488 | 13,0259 | 535 | 14,1637 | 583 | 15,3000 | 629 | 16,4350 | 676 |
| 4,65 | 11,9347 | 490 | 13,0794 | 537 | 14,2220 | 584 | 15,3629 | 631 | 16,5026 | 678 |
| 4,66 | 11,9837 | 491 | 13,1331 | 538 | 14,2804 | 585 | 15,4260 | 632 | 16,5704 | 679 |
| 4,67 | 12,0328 | 492 | 13,1869 | 539 | 14,3389 | 586 | 15,4892 | 634 | 16,6383 | 681 |
| 4,68 | 12,0820 | 493 | 13,2408 | 540 | 14,3975 | 587 | 15,5526 | 635 | 16,7064 | 682 |
| 4,69 | 12,1313 | 494 | 13,2948 | 541 | 14,4562 | 589 | 15,6161 | 636 | 16,7746 | 683 |
| 4,70 | 12,1807 | | 13,3489 | | 14,5151 | | 15,6797 | | 16,8429 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,4$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,5$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,6$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,7$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,8$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,70 | 6,2693 | 254 | 7,4678 | 303 | 8,6550 | 351 | 9,8348 | 400 | 11,0096 | 447 |
| 4,71 | 6,2947 | 254 | 7,4981 | 303 | 8,6901 | 352 | 9,8748 | 400 | 11,0543 | 448 |
| 4,72 | 6,3201 | 255 | 7,5284 | 304 | 8,7253 | 353 | 9,9148 | 402 | 11,0991 | 449 |
| 4,73 | 6,3456 | 256 | 7,5588 | 305 | 8,7606 | 353 | 9,9550 | 401 | 11,1440 | 450 |
| 4,74 | 6,3712 | 256 | 7,5893 | 305 | 8,7959 | 354 | 9,9951 | 402 | 11,1890 | 451 |
| 4,75 | 6,3968 | 256 | 7,6198 | 306 | 8,8313 | 355 | 10,0353 | 404 | 11,2341 | 452 |
| 4,76 | 6,4224 | 257 | 7,6504 | 307 | 8,8668 | 356 | 10,0757 | 405 | 11,2793 | 453 |
| 4,77 | 6,4481 | 258 | 7,6811 | 307 | 8,9024 | 356 | 10,1162 | 404 | 11,3246 | 453 |
| 4,78 | 6,4739 | 258 | 7,7118 | 308 | 8,9380 | 357 | 10,1566 | 406 | 11,3699 | 455 |
| 4,79 | 6,4997 | 259 | 7,7426 | 309 | 8,9737 | 359 | 10,1972 | 407 | 11,4154 | 456 |
| 4,80 | 6,5256 | 260 | 7,7735 | 309 | 9,0096 | 358 | 10,2379 | 408 | 11,4610 | 457 |
| 4,81 | 6,5516 | 260 | 7,8044 | 310 | 9,0454 | 359 | 10,2787 | 409 | 11,5067 | 458 |
| 4,82 | 6,5776 | 260 | 7,8354 | 310 | 9,0813 | 360 | 10,3196 | 409 | 11,5525 | 458 |
| 4,83 | 6,6036 | 261 | 7,8664 | 311 | 9,1173 | 362 | 10,3605 | 411 | 11,5983 | 460 |
| 4,84 | 6,6297 | 261 | 7,8975 | 312 | 9,1535 | 361 | 10,4016 | 411 | 11,6443 | 461 |
| 4,85 | 6,6558 | 262 | 7,9287 | 313 | 9,1896 | 363 | 10,4427 | 412 | 11,6904 | 461 |
| 4,86 | 6,6820 | 263 | 7,9600 | 313 | 9,2259 | 363 | 10,4839 | 413 | 11,7365 | 462 |
| 4,87 | 6,7083 | 263 | 7,9913 | 314 | 9,2622 | 364 | 10,5252 | 413 | 11,7827 | 463 |
| 4,88 | 6,7346 | 264 | 8,0227 | 314 | 9,2986 | 364 | 10,5665 | 415 | 11,8290 | 465 |
| 4,89 | 6,7610 | 264 | 8,0541 | 315 | 9,3350 | 366 | 10,6080 | 415 | 11,8755 | 465 |
| 4,90 | 6,7874 | 265 | 8,0856 | 316 | 9,3716 | 366 | 10,6495 | 417 | 11,9220 | 466 |
| 4,91 | 6,8139 | 265 | 8,1172 | 316 | 9,4082 | 367 | 10,6912 | 416 | 11,9686 | 467 |
| 4,92 | 6,8404 | 266 | 8,1488 | 317 | 9,4449 | 367 | 10,7328 | 418 | 12,0153 | 468 |
| 4,93 | 6,8670 | 266 | 8,1805 | 317 | 9,4816 | 369 | 10,7746 | 419 | 12,0621 | 469 |
| 4,94 | 6,8936 | 267 | 8,2122 | 318 | 9,5185 | 369 | 10,8165 | 420 | 12,1090 | 470 |
| 4,95 | 6,9203 | 268 | 8,2440 | 319 | 9,5554 | 370 | 10,8585 | 421 | 12,1560 | 471 |
| 4,96 | 6,9471 | 267 | 8,2759 | 320 | 9,5924 | 370 | 10,9006 | 421 | 12,2031 | 472 |
| 4,97 | 6,9738 | 269 | 8,3079 | 320 | 9,6294 | 372 | 10,9427 | 422 | 12,2503 | 473 |
| 4,98 | 7,0007 | 269 | 8,3399 | 321 | 9,6666 | 372 | 10,9849 | 423 | 12,2976 | 474 |
| 4,99 | 7,0276 | 270 | 8,3720 | 322 | 9,7038 | 373 | 11,0272 | 424 | 12,3450 | 475 |
| 5,00 | 7,0546 | | 8,4042 | | 9,7411 | | 11,0696 | | 12,3925 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,9$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,0$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,1$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,2$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,3$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,70 | 12,1807 | 495 | 13,3489 | 543 | 14,5151 | 591 | 15,6797 | 638 | 16,8429 | 685 |
| 4,71 | 12,2302 | 496 | 13,4032 | 544 | 14,5742 | 591 | 15,7435 | 639 | 16,9114 | 686 |
| 4,72 | 12,2798 | 496 | 13,4576 | 545 | 14,6333 | 593 | 15,8074 | 640 | 16,9800 | 688 |
| 4,73 | 12,3294 | 498 | 13,5121 | 546 | 14,6926 | 593 | 15,8714 | 641 | 17,0488 | 689 |
| 4,74 | 12,3792 | 499 | 13,5667 | 547 | 14,7519 | 595 | 15,9355 | 643 | 17,1177 | 691 |
| 4,75 | 12,4291 | 500 | 13,6214 | 548 | 14,8114 | 597 | 15,9998 | 644 | 17,1868 | 692 |
| 4,76 | 12,4791 | 502 | 13,6762 | 550 | 14,8711 | 598 | 16,0642 | 646 | 17,2560 | 694 |
| 4,77 | 12,5293 | 502 | 13,7312 | 550 | 14,9309 | 598 | 16,1288 | 647 | 17,3254 | 695 |
| 4,78 | 12,5795 | 503 | 13,7862 | 552 | 14,9907 | 600 | 16,1935 | 648 | 17,3949 | 697 |
| 4,79 | 12,6298 | 505 | 13,8414 | 553 | 15,0507 | 602 | 16,2583 | 650 | 17,4646 | 698 |
| 4,80 | 12,6803 | 505 | 13,8967 | 554 | 15,1109 | 602 | 16,3233 | 651 | 17,5344 | 699 |
| 4,81 | 12,7308 | 506 | 13,9521 | 555 | 15,1711 | 604 | 16,3884 | 652 | 17,6043 | 701 |
| 4,82 | 12,7814 | 508 | 14,0076 | 556 | 15,2315 | 605 | 16,4536 | 654 | 17,6744 | 702 |
| 4,83 | 12,8322 | 509 | 14,0632 | 558 | 15,2920 | 607 | 16,5190 | 656 | 17,7446 | 704 |
| 4,84 | 12,8831 | 509 | 14,1190 | 558 | 15,3527 | 607 | 16,5846 | 656 | 17,8150 | 706 |
| 4,85 | 12,9340 | 511 | 14,1748 | 560 | 15,4134 | 609 | 16,6502 | 658 | 17,8856 | 707 |
| 4,86 | 12,9851 | 512 | 14,2308 | 561 | 15,4743 | 610 | 16,7160 | 659 | 17,9563 | 708 |
| 4,87 | 13,0363 | 513 | 14,2869 | 562 | 15,5353 | 611 | 16,7819 | 660 | 18,0271 | 709 |
| 4,88 | 13,0876 | 514 | 14,3431 | 564 | 15,5964 | 613 | 16,8479 | 662 | 18,0980 | 711 |
| 4,89 | 13,1390 | 515 | 14,3995 | 564 | 15,6577 | 614 | 16,9141 | 663 | 18,1691 | 713 |
| 4,90 | 13,1905 | 515 | 14,4559 | 566 | 15,7191 | 615 | 16,9804 | 665 | 18,2404 | 714 |
| 4,91 | 13,2420 | 517 | 14,5125 | 566 | 15,7806 | 616 | 17,0469 | 666 | 18,3118 | 715 |
| 4,92 | 13,2937 | 518 | 14,5691 | 568 | 15,8422 | 618 | 17,1135 | 667 | 18,3833 | 717 |
| 4,93 | 13,3455 | 520 | 14,6259 | 569 | 15,9040 | 619 | 17,1802 | 669 | 18,4550 | 719 |
| 4,94 | 13,3975 | 520 | 14,6828 | 571 | 15,9659 | 620 | 17,2471 | 670 | 18,5269 | 720 |
| 4,95 | 13,4495 | 521 | 14,7399 | 571 | 16,0279 | 621 | 17,3141 | 672 | 18,5989 | 721 |
| 4,96 | 13,5016 | 522 | 14,7970 | 572 | 16,0900 | 623 | 17,3813 | 672 | 18,6710 | 723 |
| 4,97 | 13,5538 | 524 | 14,8542 | 574 | 16,1523 | 624 | 17,4485 | 674 | 18,7433 | 724 |
| 4,98 | 13,6062 | 524 | 14,9116 | 575 | 16,2147 | 625 | 17,5159 | 676 | 18,8157 | 726 |
| 4,99 | 13,6586 | 525 | 14,9691 | 576 | 16,2772 | 626 | 17,5835 | 677 | 18,8883 | 727 |
| 5,00 | 13,7111 | | 15,0267 | | 16,3398 | | 17,6512 | | 18,9610 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$ (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,4$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,5$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,6$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,7$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,8$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,00 | 7,0546 | 270 | 8,4042 | 322 | 9,7411 | 373 | 11,0696 | 425 | 12,3925 | 475 |
| 5,01 | 7,0816 | 270 | 8,4364 | 323 | 9,7784 | 374 | 11,1121 | 425 | 12,4400 | 477 |
| 5,02 | 7,1086 | 272 | 8,4687 | 323 | 9,8158 | 375 | 11,1546 | 427 | 12,4877 | 477 |
| 5,03 | 7,1358 | 271 | 8,5010 | 324 | 9,8533 | 376 | 11,1973 | 427 | 12,5354 | 479 |
| 5,04 | 7,1629 | 273 | 8,5334 | 324 | 9,8909 | 377 | 11,2400 | 428 | 12,5833 | 479 |
| 5,05 | 7,1902 | 272 | 8,5658 | 326 | 9,9286 | 377 | 11,2828 | 429 | 12,6312 | 481 |
| 5,06 | 7,2174 | 274 | 8,5984 | 326 | 9,9663 | 378 | 11,3257 | 430 | 12,6793 | 481 |
| 5,07 | 7,2448 | 274 | 8,6310 | 327 | 10,0041 | 379 | 11,3687 | 431 | 12,7274 | 482 |
| 5,08 | 7,2722 | 275 | 8,6637 | 327 | 10,0420 | 380 | 11,4118 | 431 | 12,7756 | 484 |
| 5,09 | 7,2997 | 274 | 8,6964 | 328 | 10,0800 | 380 | 11,4549 | 433 | 12,8240 | 484 |
| 5,10 | 7,3271 | 276 | 8,7292 | 328 | 10,1180 | 381 | 11,4982 | 433 | 12,8724 | 485 |
| 5,11 | 7,3547 | 276 | 8,7620 | 329 | 10,1561 | 382 | 11,5415 | 434 | 12,9209 | 486 |
| 5,12 | 7,3823 | 277 | 8,7949 | 330 | 10,1943 | 382 | 11,5849 | 436 | 12,9695 | 487 |
| 5,13 | 7,4100 | 277 | 8,8279 | 331 | 10,2325 | 383 | 11,6285 | 435 | 13,0182 | 488 |
| 5,14 | 7,4377 | 277 | 8,8610 | 331 | 10,2708 | 384 | 11,6720 | 437 | 13,0670 | 489 |
| 5,15 | 7,4654 | 278 | 8,8941 | 332 | 10,3092 | 385 | 11,7157 | 437 | 13,1159 | 490 |
| 5,16 | 7,4932 | 279 | 8,9273 | 332 | 10,3477 | 386 | 11,7594 | 439 | 13,1649 | 491 |
| 5,17 | 7,5211 | 279 | 8,9605 | 333 | 10,3863 | 386 | 11,8033 | 439 | 13,2140 | 492 |
| 5,18 | 7,5490 | 280 | 8,9938 | 334 | 10,4249 | 387 | 11,8472 | 440 | 13,2632 | 492 |
| 5,19 | 7,5770 | 281 | 9,0272 | 334 | 10,4636 | 388 | 11,8912 | 440 | 13,3124 | 494 |
| 5,20 | 7,6051 | 281 | 9,0606 | 335 | 10,5024 | 389 | 11,9352 | 442 | 13,3618 | 495 |
| 5,21 | 7,6332 | 282 | 9,0941 | 336 | 10,5413 | 389 | 11,9794 | 443 | 13,4113 | 496 |
| 5,22 | 7,6614 | 282 | 9,1277 | 336 | 10,5802 | 390 | 12,0237 | 443 | 13,4609 | 497 |
| 5,23 | 7,6896 | 282 | 9,1613 | 337 | 10,6192 | 391 | 12,0680 | 445 | 13,5106 | 497 |
| 5,24 | 7,7178 | 283 | 9,1950 | 338 | 10,6583 | 391 | 12,1125 | 445 | 13,5603 | 499 |
| 5,25 | 7,7461 | 283 | 9,2288 | 338 | 10,6974 | 392 | 12,1570 | 446 | 13,6102 | 499 |
| 5,26 | 7,7744 | 284 | 9,2626 | 338 | 10,7366 | 394 | 12,2016 | 447 | 13,6601 | 501 |
| 5,27 | 7,8028 | 285 | 9,2964 | 340 | 10,7760 | 393 | 12,2463 | 447 | 13,7102 | 501 |
| 5,28 | 7,8313 | 285 | 9,3304 | 340 | 10,8153 | 395 | 12,2910 | 448 | 13,7603 | 502 |
| 5,29 | 7,8598 | 286 | 9,3644 | 341 | 10,8548 | 395 | 12,3358 | 450 | 13,8105 | 504 |
| 5,30 | 7,8884 | | 9,3985 | | 10,8943 | | 12,3808 | | 13,8609 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,9$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,0$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,1$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,2$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,3$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,00 | 13,7111 | 527 | 15,0267 | 577 | 16,3398 | 628 | 17,6512 | 678 | 18,9610 | 728 |
| 5,01 | 13,7638 | 527 | 15,0844 | 578 | 16,4026 | 630 | 17,7190 | 680 | 19,0338 | 730 |
| 5,02 | 13,8165 | 529 | 15,1422 | 580 | 16,4656 | 630 | 17,7870 | 680 | 19,1068 | 732 |
| 5,03 | 13,8694 | 529 | 15,2002 | 580 | 16,5286 | 631 | 17,8550 | 682 | 19,1800 | 733 |
| 5,04 | 13,9223 | 531 | 15,2582 | 582 | 16,5917 | 632 | 17,9232 | 684 | 19,2533 | 734 |
| 5,05 | 13,9754 | 532 | 15,3164 | 583 | 16,6549 | 634 | 17,9916 | 685 | 19,3267 | 736 |
| 5,06 | 14,0286 | 532 | 15,3747 | 584 | 16,7183 | 636 | 18,0601 | 686 | 19,4003 | 738 |
| 5,07 | 14,0818 | 534 | 15,4331 | 585 | 16,7819 | 636 | 18,1287 | 688 | 19,4741 | 739 |
| 5,08 | 14,1352 | 535 | 15,4916 | 587 | 16,8455 | 638 | 18,1975 | 689 | 19,5480 | 740 |
| 5,09 | 14,1887 | 536 | 15,5503 | 587 | 16,9093 | 639 | 18,2664 | 690 | 19,6220 | 742 |
| 5,10 | 14,2423 | 537 | 15,6090 | 589 | 16,9732 | 640 | 18,3354 | 692 | 19,6962 | 743 |
| 5,11 | 14,2960 | 538 | 15,6679 | 589 | 17,0372 | 642 | 18,4046 | 693 | 19,7705 | 744 |
| 5,12 | 14,3498 | 539 | 15,7268 | 591 | 17,1014 | 642 | 18,4739 | 695 | 19,8449 | 746 |
| 5,13 | 14,4037 | 540 | 15,7859 | 592 | 17,1656 | 644 | 18,5434 | 696 | 19,9195 | 748 |
| 5,14 | 14,4577 | 541 | 15,8451 | 593 | 17,2300 | 645 | 18,6130 | 697 | 19,9943 | 749 |
| 5,15 | 14,5118 | 542 | 15,9044 | 595 | 17,2945 | 647 | 18,6827 | 698 | 20,0692 | 750 |
| 5,16 | 14,5660 | 544 | 15,9639 | 596 | 17,3592 | 648 | 18,7525 | 700 | 20,1442 | 752 |
| 5,17 | 14,6204 | 544 | 16,0235 | 596 | 17,4240 | 649 | 18,8225 | 701 | 20,2194 | 754 |
| 5,18 | 14,6748 | 546 | 16,0831 | 598 | 17,4889 | 650 | 18,8926 | 703 | 20,2948 | 755 |
| 5,19 | 14,7294 | 546 | 16,1429 | 599 | 17,5539 | 652 | 18,9629 | 704 | 20,3703 | 756 |
| 5,20 | 14,7840 | 548 | 16,2028 | 601 | 17,6191 | 653 | 19,0333 | 706 | 20,4459 | 757 |
| 5,21 | 14,8388 | 548 | 16,2629 | 601 | 17,6844 | 654 | 19,1039 | 706 | 20,5216 | 759 |
| 5,22 | 14,8936 | 550 | 16,3230 | 602 | 17,7498 | 655 | 19,1745 | 708 | 20,5975 | 761 |
| 5,23 | 14,9486 | 550 | 16,3832 | 604 | 17,8153 | 656 | 19,2453 | 709 | 20,6736 | 762 |
| 5,24 | 15,0036 | 552 | 16,4436 | 605 | 17,8809 | 658 | 19,3162 | 711 | 20,7498 | 764 |
| 5,25 | 15,0588 | 553 | 16,5041 | 606 | 17,9467 | 659 | 19,3873 | 712 | 20,8262 | 765 |
| 5,26 | 15,1141 | 554 | 16,5647 | 607 | 18,0126 | 660 | 19,4585 | 713 | 20,9027 | 766 |
| 5,27 | 15,1695 | 555 | 16,6254 | 608 | 18,0786 | 662 | 19,5298 | 715 | 20,9793 | 768 |
| 5,28 | 15,2250 | 556 | 16,6862 | 610 | 18,1448 | 663 | 19,6013 | 716 | 21,0561 | 769 |
| 5,29 | 15,2806 | 557 | 16,7472 | 610 | 18,2111 | 664 | 19,6729 | 717 | 21,1330 | 771 |
| 5,30 | 15,3363 | | 16,8082 | | 18,2775 | | 19,7446 | | 21,2101 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,4$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,5$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,6$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,7$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,8$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,30 | 7,8884 | 287 | 9,3985 | 341 | 10,8943 | 396 | 12,3808 | 450 | 13,8609 | 504 |
| 5,31 | 7,9171 | 287 | 9,4326 | 342 | 10,9339 | 397 | 12,4258 | 451 | 13,9113 | 505 |
| 5,32 | 7,9458 | 287 | 9,4668 | 343 | 10,9736 | 397 | 12,4709 | 452 | 13,9618 | 506 |
| 5,33 | 7,9745 | 288 | 9,5011 | 343 | 11,0133 | 398 | 12,5161 | 453 | 14,0124 | 507 |
| 5,34 | 8,0033 | 288 | 9,5354 | 344 | 11,0531 | 400 | 12,5614 | 453 | 14,0631 | 508 |
| 5,35 | 8,0321 | 289 | 9,5698 | 345 | 11,0931 | 399 | 12,6067 | 455 | 14,1139 | 509 |
| 5,36 | 8,0610 | 290 | 9,6043 | 345 | 11,1330 | 400 | 12,6522 | 455 | 14,1648 | 510 |
| 5,37 | 8,0900 | 290 | 9,6388 | 346 | 11,1730 | 402 | 12,6977 | 456 | 14,2158 | 511 |
| 5,38 | 8,1190 | 291 | 9,6734 | 347 | 11,2132 | 402 | 12,7433 | 457 | 14,2669 | 512 |
| 5,39 | 8,1481 | 291 | 9,7081 | 347 | 11,2534 | 403 | 12,7890 | 458 | 14,3181 | 512 |
| 5,40 | 8,1772 | 292 | 9,7428 | 348 | 11,2937 | 403 | 12,8348 | 459 | 14,3693 | 514 |
| 5,41 | 8,2064 | 292 | 9,7776 | 348 | 11,3340 | 404 | 12,8807 | 459 | 14,4207 | 515 |
| 5,42 | 8,2356 | 293 | 9,8124 | 349 | 11,3744 | 405 | 12,9266 | 461 | 14,4722 | 515 |
| 5,43 | 8,2649 | 293 | 9,8473 | 350 | 11,4149 | 406 | 12,9727 | 461 | 14,5237 | 517 |
| 5,44 | 8,2942 | 294 | 9,8823 | 351 | 11,4555 | 407 | 13,0188 | 462 | 14,5754 | 517 |
| 5,45 | 8,3236 | 294 | 9,9174 | 351 | 11,4962 | 407 | 13,0650 | 463 | 14,6271 | 519 |
| 5,46 | 8,3530 | 295 | 9,9525 | 352 | 11,5369 | 408 | 13,1113 | 464 | 14,6790 | 519 |
| 5,47 | 8,3825 | 296 | 9,9877 | 352 | 11,5777 | 408 | 13,1577 | 465 | 14,7309 | 520 |
| 5,48 | 8,4121 | 296 | 10,0229 | 353 | 11,6185 | 410 | 13,2042 | 465 | 14,7829 | 522 |
| 5,49 | 8,4417 | 297 | 10,0582 | 354 | 11,6595 | 410 | 13,2507 | 467 | 14,8351 | 522 |
| 5,50 | 8,4714 | 297 | 10,0936 | 354 | 11,7005 | 411 | 13,2974 | 467 | 14,8873 | 523 |
| 5,51 | 8,5011 | 298 | 10,1290 | 355 | 11,7416 | 411 | 13,3441 | 468 | 14,9396 | 525 |
| 5,52 | 8,5309 | 298 | 10,1645 | 355 | 11,7827 | 412 | 13,3909 | 469 | 14,9921 | 525 |
| 5,53 | 8,5607 | 298 | 10,2000 | 357 | 11,8239 | 414 | 13,4378 | 470 | 15,0446 | 526 |
| 5,54 | 8,5905 | 299 | 10,2357 | 357 | 11,8653 | 414 | 13,4848 | 470 | 15,0972 | 527 |
| 5,55 | 8,6204 | 301 | 10,2714 | 357 | 11,9067 | 415 | 13,5318 | 472 | 15,1499 | 527 |
| 5,56 | 8,6505 | 300 | 10,3071 | 358 | 11,9482 | 415 | 13,5790 | 472 | 15,2026 | 529 |
| 5,57 | 8,6805 | 301 | 10,3429 | 359 | 11,9897 | 416 | 13,6262 | 473 | 15,2555 | 531 |
| 5,58 | 8,7106 | 302 | 10,3788 | 359 | 12,0313 | 417 | 13,6735 | 474 | 15,3086 | 530 |
| 5,59 | 8,7408 | 301 | 10,4147 | 360 | 12,0730 | 418 | 13,7209 | 475 | 15,3616 | 532 |
| 5,60 | 8,7709 | | 10,4507 | | 12,1148 | | 13,7684 | | 15,4148 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,9$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,0$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,1$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,2$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,3$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,30 | 15,3363 | 558 | 16,8082 | 612 | 18,2775 | 665 | 19,7446 | 719 | 21,2101 | 772 |
| 5,31 | 15,3921 | 559 | 16,8694 | 612 | 18,3440 | 667 | 19,8165 | 720 | 21,2873 | 774 |
| 5,32 | 15,4480 | 560 | 16,9306 | 614 | 18,4107 | 667 | 19,8885 | 722 | 21,3647 | 775 |
| 5,33 | 15,5040 | 561 | 16,9920 | 616 | 18,4774 | 669 | 19,9607 | 723 | 21,4422 | 777 |
| 5,34 | 15,5601 | 562 | 17,0536 | 617 | 18,5443 | 670 | 20,0330 | 725 | 21,5199 | 778 |
| 5,35 | 15,6163 | 564 | 17,1153 | 617 | 18,6113 | 672 | 20,1055 | 725 | 21,5977 | 780 |
| 5,36 | 15,6727 | 564 | 17,1770 | 619 | 18,6785 | 673 | 20,1780 | 727 | 21,6757 | 781 |
| 5,37 | 15,7291 | 565 | 17,2389 | 619 | 18,7458 | 674 | 20,2507 | 728 | 21,7538 | 782 |
| 5,38 | 15,7856 | 567 | 17,3008 | 621 | 18,8132 | 675 | 20,3235 | 729 | 21,8320 | 784 |
| 5,39 | 15,8423 | 567 | 17,3629 | 622 | 18,8807 | 677 | 20,3964 | 731 | 21,9104 | 786 |
| 5,40 | 15,8990 | 569 | 17,4251 | 623 | 18,9484 | 678 | 20,4695 | 733 | 21,9890 | 787 |
| 5,41 | 15,9559 | 569 | 17,4874 | 625 | 19,0162 | 679 | 20,5428 | 734 | 22,0677 | 788 |
| 5,42 | 16,0128 | 571 | 17,5499 | 625 | 19,0841 | 681 | 20,6162 | 735 | 22,1465 | 790 |
| 5,43 | 16,0699 | 571 | 17,6124 | 627 | 19,1522 | 682 | 20,6897 | 736 | 22,2255 | 791 |
| 5,44 | 16,1270 | 573 | 17,6751 | 628 | 19,2204 | 683 | 20,7633 | 738 | 22,3046 | 792 |
| 5,45 | 16,1843 | 574 | 17,7379 | 629 | 19,2887 | 684 | 20,8371 | 739 | 22,3838 | 794 |
| 5,46 | 16,2417 | 575 | 17,8008 | 630 | 19,3571 | 685 | 20,9110 | 741 | 22,4632 | 796 |
| 5,47 | 16,2992 | 576 | 17,8638 | 631 | 19,4256 | 686 | 20,9851 | 742 | 22,5428 | 797 |
| 5,48 | 16,3568 | 577 | 17,9269 | 633 | 19,4942 | 688 | 21,0593 | 743 | 22,6225 | 799 |
| 5,49 | 16,4145 | 578 | 17,9902 | 634 | 19,5630 | 689 | 21,1336 | 744 | 22,7024 | 800 |
| 5,50 | 16,4723 | 579 | 18,0536 | 634 | 19,6319 | 690 | 21,2080 | 746 | 22,7824 | 801 |
| 5,51 | 16,5302 | 580 | 18,1170 | 636 | 19,7009 | 692 | 21,2826 | 747 | 22,8625 | 803 |
| 5,52 | 16,5882 | 581 | 18,1806 | 637 | 19,7701 | 693 | 21,3573 | 748 | 22,9428 | 804 |
| 5,53 | 16,6463 | 583 | 18,2443 | 639 | 19,8394 | 694 | 21,4321 | 751 | 23,0232 | 806 |
| 5,54 | 16,7046 | 583 | 18,3082 | 639 | 19,9088 | 696 | 21,5072 | 752 | 23,1038 | 807 |
| 5,55 | 16,7629 | 584 | 18,3721 | 641 | 19,9784 | 697 | 21,5824 | 752 | 23,1845 | 809 |
| 5,56 | 16,8213 | 586 | 18,4362 | 642 | 20,0481 | 697 | 21,6576 | 754 | 23,2654 | 810 |
| 5,57 | 16,8799 | 586 | 18,5004 | 642 | 20,1178 | 699 | 21,7330 | 755 | 23,3464 | 812 |
| 5,58 | 16,9385 | 587 | 18,5646 | 644 | 20,1877 | 701 | 21,8085 | 757 | 23,4276 | 813 |
| 5,59 | 16,9972 | 589 | 18,6290 | 645 | 20,2578 | 702 | 21,8842 | 759 | 23,5089 | 814 |
| 5,60 | 17,0561 | | 18,6935 | | 20,3280 | | 21,9601 | | 23,5903 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,4$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,5$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,6$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,7$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,8$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,60 | 8,7709 | 303 | 10,4507 | 361 | 12,1148 | 418 | 13,7684 | 475 | 15,4148 | 533 |
| 5,61 | 8,8012 | 303 | 10,4868 | 362 | 12,1566 | 419 | 13,8159 | 477 | 15,4681 | 533 |
| 5,62 | 8,8315 | 303 | 10,5230 | 362 | 12,1985 | 420 | 13,8636 | 478 | 15,5214 | 535 |
| 5,63 | 8,8618 | 305 | 10,5592 | 363 | 12,2405 | 421 | 13,9114 | 478 | 15,5749 | 536 |
| 5,64 | 8,8923 | 304 | 10,5955 | 363 | 12,2826 | 421 | 13,9592 | 479 | 15,6285 | 536 |
| 5,65 | 8,9227 | 306 | 10,6318 | 364 | 12,3247 | 422 | 14,0071 | 479 | 15,6821 | 538 |
| 5,66 | 8,9533 | 305 | 10,6682 | 364 | 12,3669 | 423 | 14,0550 | 481 | 15,7359 | 538 |
| 5,67 | 8,9838 | 307 | 10,7046 | 365 | 12,4092 | 424 | 14,1031 | 482 | 15,7897 | 539 |
| 5,68 | 9,0145 | 307 | 10,7411 | 367 | 12,4516 | 424 | 14,1513 | 482 | 15,8436 | 541 |
| 5,69 | 9,0452 | 307 | 10,7778 | 366 | 12,4940 | 425 | 14,1995 | 484 | 15,8977 | 541 |
| 5,70 | 9,0759 | 308 | 10,8144 | 367 | 12,5365 | 426 | 14,2479 | 484 | 15,9518 | 542 |
| 5,71 | 9,1067 | 308 | 10,8511 | 368 | 12,5791 | 426 | 14,2963 | 485 | 16,0060 | 543 |
| 5,72 | 9,1375 | 309 | 10,8879 | 369 | 12,6217 | 428 | 14,3448 | 486 | 16,0603 | 544 |
| 5,73 | 9,1684 | 310 | 10,9248 | 369 | 12,6645 | 428 | 14,3934 | 486 | 16,1147 | 546 |
| 5,74 | 9,1994 | 310 | 10,9617 | 369 | 12,7073 | 429 | 14,4420 | 488 | 16,1693 | 546 |
| 5,75 | 9,2304 | 311 | 10,9986 | 371 | 12,7502 | 429 | 14,4908 | 488 | 16,2239 | 547 |
| 5,76 | 9,2615 | 311 | 11,0357 | 371 | 12,7931 | 431 | 14,5396 | 490 | 16,2786 | 548 |
| 5,77 | 9,2926 | 312 | 11,0728 | 372 | 12,8362 | 431 | 14,5886 | 490 | 16,3334 | 549 |
| 5,78 | 9,3238 | 312 | 11,1100 | 372 | 12,8793 | 432 | 14,6376 | 491 | 16,3883 | 550 |
| 5,79 | 9,3550 | 313 | 11,1472 | 373 | 12,9225 | 432 | 14,6867 | 492 | 16,4433 | 550 |
| 5,80 | 9,3863 | 313 | 11,1845 | 374 | 12,9657 | 434 | 14,7359 | 493 | 16,4983 | 552 |
| 5,81 | 9,4176 | 314 | 11,2219 | 374 | 13,0091 | 434 | 14,7852 | 493 | 16,5535 | 553 |
| 5,82 | 9,4490 | 314 | 11,2593 | 375 | 13,0525 | 435 | 14,8345 | 494 | 16,6088 | 554 |
| 5,83 | 9,4804 | 315 | 11,2968 | 375 | 13,0960 | 435 | 14,8839 | 495 | 16,6642 | 554 |
| 5,84 | 9,5119 | 315 | 11,3343 | 377 | 13,1395 | 436 | 14,9334 | 496 | 16,7196 | 556 |
| 5,85 | 9,5434 | 316 | 11,3720 | 376 | 13,1831 | 437 | 14,9830 | 498 | 16,7752 | 556 |
| 5,86 | 9,5750 | 317 | 11,4096 | 378 | 13,2268 | 438 | 15,0328 | 497 | 16,8308 | 557 |
| 5,87 | 9,6067 | 317 | 11,4474 | 377 | 13,2706 | 439 | 15,0825 | 499 | 16,8865 | 559 |
| 5,88 | 9,6384 | 318 | 11,4851 | 379 | 13,3145 | 439 | 15,1324 | 499 | 16,9424 | 559 |
| 5,89 | 9,6702 | 318 | 11,5230 | 380 | 13,3584 | 440 | 15,1823 | 500 | 16,9983 | 560 |
| 5,90 | 9,7020 | | 11,5610 | | 13,4024 | | 15,2323 | | 17,0543 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,9$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,0$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,1$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,2$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,3$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,60 | 17,0561 | 590 | 18,6935 | 646 | 20,3280 | 703 | 21,9601 | 759 | 23,5903 | 816 |
| 5,61 | 17,1151 | 590 | 18,7581 | 648 | 20,3983 | 704 | 22,0360 | 761 | 23,6719 | 817 |
| 5,62 | 17,1741 | 592 | 18,8229 | 649 | 20,4687 | 705 | 22,1121 | 763 | 23,7536 | 819 |
| 5,63 | 17,2333 | 593 | 18,8878 | 650 | 20,5392 | 707 | 22,1884 | 763 | 23,8355 | 821 |
| 5,64 | 17,2926 | 594 | 18,9528 | 650 | 20,6099 | 707 | 22,2647 | 765 | 23,9176 | 822 |
| 5,65 | 17,3520 | 594 | 19,0178 | 652 | 20,6806 | 709 | 22,3402 | 766 | 23,9998 | 823 |
| 5,66 | 17,4114 | 596 | 19,0830 | 654 | 20,7515 | 711 | 22,4178 | 768 | 24,0821 | 825 |
| 5,67 | 17,4710 | 597 | 19,1484 | 654 | 20,8226 | 712 | 22,4946 | 769 | 24,1646 | 826 |
| 5,68 | 17,5307 | 598 | 19,2138 | 655 | 20,8938 | 713 | 22,5715 | 770 | 24,2472 | 827 |
| 5,69 | 17,5905 | 599 | 19,2793 | 657 | 20,9651 | 714 | 22,6485 | 771 | 24,3299 | 829 |
| 5,70 | 17,6504 | 600 | 19,3450 | 658 | 21,0365 | 716 | 22,7256 | 773 | 24,4128 | 831 |
| 5,71 | 17,7104 | 601 | 19,4108 | 659 | 21,1081 | 717 | 22,8029 | 775 | 24,4959 | 832 |
| 5,72 | 17,7705 | 603 | 19,4767 | 660 | 21,1798 | 718 | 22,8804 | 776 | 24,5791 | 833 |
| 5,73 | 17,8308 | 603 | 19,5427 | 661 | 21,2516 | 719 | 22,9580 | 777 | 24,6624 | 835 |
| 5,74 | 17,8911 | 604 | 19,6088 | 663 | 21,3235 | 720 | 23,0357 | 779 | 24,7459 | 836 |
| 5,75 | 17,9515 | 605 | 19,6751 | 663 | 21,3955 | 722 | 23,1136 | 779 | 24,8295 | 838 |
| 5,76 | 18,0120 | 607 | 19,7414 | 665 | 21,4677 | 723 | 23,1915 | 781 | 24,9133 | 839 |
| 5,77 | 18,0727 | 608 | 19,8079 | 666 | 21,5400 | 724 | 23,2696 | 783 | 24,9972 | 841 |
| 5,78 | 18,1335 | 608 | 19,8745 | 667 | 21,6124 | 726 | 23,3479 | 784 | 25,0813 | 842 |
| 5,79 | 18,1943 | 610 | 19,9412 | 668 | 21,6850 | 727 | 23,4263 | 786 | 25,1655 | 844 |
| 5,80 | 18,2553 | 610 | 20,0080 | 670 | 21,7577 | 728 | 23,5049 | 786 | 25,2499 | 845 |
| 5,81 | 18,3163 | 612 | 20,0750 | 671 | 21,8305 | 729 | 23,5835 | 788 | 25,3344 | 846 |
| 5,82 | 18,3775 | 613 | 20,1421 | 672 | 21,9034 | 730 | 23,6623 | 789 | 25,4190 | 848 |
| 5,83 | 18,4388 | 614 | 20,2093 | 672 | 21,9764 | 732 | 23,7412 | 791 | 25,5038 | 850 |
| 5,84 | 18,5002 | 614 | 20,2765 | 674 | 22,0496 | 733 | 23,8203 | 791 | 25,5888 | 851 |
| 5,85 | 18,5616 | 616 | 20,3439 | 675 | 22,1229 | 735 | 23,8994 | 793 | 25,6739 | 852 |
| 5,86 | 18,6232 | 617 | 20,4114 | 677 | 22,1964 | 735 | 23,9787 | 795 | 25,7591 | 854 |
| 5,87 | 18,6849 | 618 | 20,4791 | 677 | 22,2699 | 737 | 24,0582 | 796 | 25,8445 | 855 |
| 5,88 | 18,7467 | 619 | 20,5468 | 679 | 22,3436 | 738 | 24,1378 | 798 | 25,9300 | 857 |
| 5,89 | 13,8086 | 620 | 20,6147 | 679 | 22,4174 | 739 | 24,2176 | 799 | 26,0157 | 858 |
| 5,90 | 18,8706 | | 20,6826 | | 22,4913 | | 24,2975 | | 26,1015 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,4$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,5$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,6$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,7$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 0,8$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,90 | 9,7020 | 319 | 11,5610 | 380 | 13,4024 | 441 | 15,2323 | 502 | 17,0543 | 562 |
| 5,91 | 9,7339 | 319 | 11,5990 | 381 | 13,4465 | 441 | 15,2825 | 502 | 17,1105 | 562 |
| 5,92 | 9,7658 | 320 | 11,6371 | 381 | 13,4906 | 443 | 15,3327 | 503 | 17,1667 | 563 |
| 5,93 | 9,7978 | 320 | 11,6752 | 382 | 13,5349 | 443 | 15,3830 | 503 | 17,2230 | 564 |
| 5,94 | 9,8298 | 321 | 11,7134 | 383 | 13,5792 | 444 | 15,4333 | 504 | 17,2794 | 565 |
| 5,95 | 9,8619 | 322 | 11,7517 | 383 | 13,6236 | 444 | 15,4837 | 506 | 17,3359 | 566 |
| 5,96 | 9,8941 | 321 | 11,7900 | 384 | 13,6680 | 445 | 15,5343 | 506 | 17,3925 | 567 |
| 5,97 | 9,9262 | 323 | 11,8284 | 384 | 13,7125 | 446 | 15,5849 | 507 | 17,4492 | 568 |
| 5,98 | 9,9585 | 323 | 11,8668 | 386 | 13,7571 | 447 | 15,6356 | 508 | 17,5060 | 569 |
| 5,99 | 9,9908 | 324 | 11,9054 | 386 | 13,8018 | 447 | 15,6864 | 509 | 17,5629 | 570 |
| 6,00 | 10,0232 | 324 | 11,9440 | 386 | 13,8465 | 449 | 15,7373 | 510 | 17,6199 | 570 |
| 6,01 | 10,0556 | 325 | 11,9826 | 387 | 13,8914 | 449 | 15,7883 | 510 | 17,6769 | 571 |
| 6,02 | 10,0881 | 325 | 12,0213 | 388 | 13,9363 | 450 | 15,8393 | 511 | 17,7340 | 573 |
| 6,03 | 10,1206 | 326 | 12,0601 | 388 | 13,9813 | 450 | 15,8904 | 512 | 17,7913 | 574 |
| 6,04 | 10,1532 | 326 | 12,0989 | 389 | 14,0263 | 451 | 15,9416 | 514 | 17,8487 | 575 |
| 6,05 | 10,1858 | 326 | 12,1378 | 390 | 14,0714 | 452 | 15,9930 | 514 | 17,9062 | 575 |
| 6,06 | 10,2184 | 327 | 12,1768 | 390 | 14,1166 | 453 | 16,0444 | 515 | 17,9637 | 577 |
| 6,07 | 10,2511 | 329 | 12,2158 | 391 | 14,1619 | 453 | 16,0959 | 515 | 18,0214 | 577 |
| 6,08 | 10,2840 | 328 | 12,2549 | 391 | 14,2072 | 454 | 16,1474 | 516 | 18,0791 | 578 |
| 6,09 | 10,3168 | 329 | 12,2940 | 393 | 14,2526 | 455 | 16,1990 | 517 | 18,1369 | 580 |
| 6,10 | 10,3497 | 329 | 12,3333 | 393 | 14,2981 | 456 | 16,2507 | 519 | 18,1949 | 580 |
| 6,11 | 10,3826 | 330 | 12,3726 | 394 | 14,3437 | 457 | 16,3026 | 519 | 18,2529 | 582 |
| 6,12 | 10,4156 | 331 | 12,4120 | 394 | 14,3894 | 457 | 16,3545 | 520 | 18,3111 | 582 |
| 6,13 | 10,4487 | 332 | 12,4514 | 395 | 14,4351 | 458 | 16,4065 | 521 | 18,3693 | 583 |
| 6,14 | 10,4819 | 331 | 12,4909 | 395 | 14,4809 | 459 | 16,4586 | 521 | 18,4276 | 584 |
| 6,15 | 10,5150 | 333 | 12,5304 | 396 | 14,5268 | 459 | 16,5107 | 522 | 18,4860 | 585 |
| 6,16 | 10,5483 | 332 | 12,5700 | 397 | 14,5727 | 461 | 16,5629 | 524 | 18,5445 | 586 |
| 6,17 | 10,5815 | 334 | 12,6097 | 398 | 14,6188 | 461 | 16,6153 | 524 | 18,6031 | 587 |
| 6,18 | 10,6149 | 334 | 12,6495 | 398 | 14,6649 | 461 | 16,6677 | 525 | 18,6618 | 588 |
| 6,19 | 10,6483 | 334 | 12,6893 | 398 | 14,7110 | 462 | 16,7202 | 525 | 18,7206 | 589 |
| 6,20 | 10,6817 | | 12,7291 | | 14,7572 | | 16,7727 | | 18,7795 | |

## TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,9$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,0$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,1$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,2$ | Diff. | $\frac{Y_0}{f} = 1,3$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,90 | 18,8706 | 621 | 20,6826 | 681 | 22,4913 | 741 | 24,2975 | 800 | 26,1015 | 860 |
| 5,91 | 18,9327 | 623 | 20,7507 | 682 | 22,5654 | 742 | 24,3775 | 801 | 26,1875 | 861 |
| 5,92 | 18,9950 | 623 | 20,8189 | 683 | 22,6396 | 743 | 24,4576 | 803 | 26,2736 | 862 |
| 5,93 | 19,0573 | 624 | 20,8872 | 685 | 22,7139 | 744 | 24,5379 | 804 | 26,3598 | 864 |
| 5,94 | 19,1197 | 626 | 20,9557 | 686 | 22,7883 | 746 | 24,6183 | 806 | 26,4462 | 866 |
| 5,95 | 19,1823 | 626 | 21,0243 | 686 | 22,8629 | 746 | 24,6989 | 807 | 26,5328 | 867 |
| 5,96 | 19,2449 | 628 | 21,0929 | 688 | 22,9375 | 748 | 24,7796 | 808 | 26,6195 | 868 |
| 5,97 | 19,3077 | 628 | 21,1617 | 689 | 23,0123 | 750 | 24,8604 | 810 | 26,7063 | 870 |
| 5,98 | 19,3705 | 630 | 21,2306 | 690 | 23,0873 | 751 | 24,9414 | 811 | 26,7933 | 871 |
| 5,99 | 19,4335 | 631 | 21,2996 | 691 | 23,1624 | 752 | 25,0225 | 812 | 26,8804 | 873 |
| 6,00 | 19,4966 | 631 | 21,3687 | 693 | 23,2376 | 753 | 25,1037 | 814 | 26,9677 | 874 |
| 6,01 | 19,5597 | 633 | 21,4380 | 694 | 23,3129 | 754 | 25,1851 | 815 | 27,0551 | 876 |
| 6,02 | 19,6230 | 633 | 21,5074 | 694 | 23,3883 | 756 | 25,2666 | 816 | 27,1427 | 877 |
| 6,03 | 19,6863 | 635 | 21,5768 | 696 | 23,4639 | 757 | 25,3482 | 818 | 27,2304 | 879 |
| 6,04 | 19,7498 | 636 | 21,6464 | 697 | 23,5396 | 758 | 25,4300 | 819 | 27,3183 | 880 |
| 6,05 | 19,8134 | 637 | 21,7161 | 698 | 23,6154 | 760 | 25,5119 | 820 | 27,4063 | 881 |
| 6,06 | 19,8771 | 638 | 21,7859 | 699 | 23,6914 | 760 | 25,5939 | 822 | 27,4944 | 883 |
| 6,07 | 19,9409 | 639 | 21,8558 | 701 | 23,7674 | 762 | 25,6761 | 823 | 27,5827 | 884 |
| 6,08 | 20,0048 | 640 | 21,9259 | 702 | 23,8436 | 763 | 25,7584 | 825 | 27,6711 | 886 |
| 6,09 | 20,0688 | 641 | 21,9961 | 703 | 23,9199 | 764 | 25,8409 | 826 | 27,7597 | 887 |
| 6,10 | 20,1329 | 642 | 22,0664 | 704 | 23,9963 | 766 | 25,9235 | 827 | 27,8484 | 889 |
| 6,11 | 20,1971 | 643 | 22,1368 | 705 | 24,0729 | 767 | 26,0062 | 829 | 27,9373 | 890 |
| 6,12 | 20,2614 | 645 | 22,2073 | 706 | 24,1496 | 768 | 26,0891 | 830 | 28,0263 | 892 |
| 6,13 | 20,3259 | 645 | 22,2779 | 707 | 24,2264 | 769 | 26,1721 | 831 | 28,1155 | 893 |
| 6,14 | 20,3904 | 647 | 22,3486 | 709 | 24,3033 | 771 | 26,2552 | 832 | 28,2048 | 895 |
| 6,15 | 20,4551 | 647 | 22,4195 | 710 | 24,3804 | 772 | 26,3384 | 834 | 28,2943 | 896 |
| 6,16 | 20,5198 | 649 | 22,4905 | 711 | 24,4576 | 773 | 26,4218 | 836 | 28,3839 | 897 |
| 6,17 | 20,5847 | 649 | 22,5616 | 712 | 24,5349 | 774 | 26,5054 | 837 | 28,4736 | 899 |
| 6,18 | 20,6496 | 651 | 22,6328 | 713 | 24,6123 | 776 | 26,5891 | 838 | 28,5635 | 901 |
| 6,19 | 20,7147 | 651 | 22,7041 | 715 | 24,6899 | 777 | 26,6729 | 839 | 28,6536 | 902 |
| 6,20 | 20,7798 | | 22,7756 | | 24,7676 | | 26,7568 | | 28,7438 | |

## TABLE II.

VALEURS DE $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,4$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,5$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,6$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,7$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3,5 | 0,3407 | 0,3431 | 0,3455 | 0,3479 | 0,3503 |
| 3,6 | 0,3403 | 0,3426 | 0,3449 | 0,3471 | 0,3494 |
| 3,7 | 0,3400 | 0,3421 | 0,3443 | 0,3464 | 0,3486 |
| 3,8 | 0,3397 | 0,3417 | 0,3437 | 0,3458 | 0,3479 |
| 3,9 | 0,3394 | 0,3413 | 0,3432 | 0,3452 | 0,3472 |
| 4,0 | 0,3391 | 0,3409 | 0,3428 | 0,3446 | 0,3465 |
| 4,1 | 0,3389 | 0,3406 | 0,3424 | 0,3441 | 0,3459 |
| 4,2 | 0,3386 | 0,3403 | 0,3420 | 0,3437 | 0,3454 |
| 4,3 | 0,3384 | 0,3400 | 0,3416 | 0,3432 | 0,3449 |
| 4,4 | 0,3382 | 0,3397 | 0,3412 | 0,3428 | 0,3444 |
| 4,5 | 0,3380 | 0,3394 | 0,3409 | 0,3424 | 0,3439 |
| 4,6 | 0,3378 | 0,3392 | 0,3406 | 0,3420 | 0,3435 |
| 4,7 | 0,3376 | 0,3389 | 0,3403 | 0,3417 | 0,3431 |
| 4,8 | 0,3375 | 0,3387 | 0,3400 | 0,3413 | 0,3427 |
| 4,9 | 0,3373 | 0,3385 | 0,3398 | 0,3410 | 0,3423 |
| 5,0 | 0,3371 | 0,3383 | 0,3395 | 0,3407 | 0,3420 |
| 5,1 | 0,3370 | 0,3381 | 0,3393 | 0,3405 | 0,3416 |
| 5,2 | 0,3369 | 0,3379 | 0,3391 | 0,3402 | 0,3413 |
| 5,3 | 0,3367 | 0,3378 | 0,3389 | 0,3400 | 0,3410 |
| 5,4 | 0,3366 | 0,3376 | 0,3387 | 0,3397 | 0,3408 |
| 5,5 | 0,3365 | 0,3375 | 0,3385 | 0,3395 | 0,3405 |
| 5,6 | 0,3364 | 0,3373 | 0,3383 | 0,3393 | 0,3403 |
| 5,7 | 0,3363 | 0,3372 | 0,3381 | 0,3391 | 0,3400 |
| 5,8 | 0,3362 | 0,3371 | 0,3380 | 0,3389 | 0,3398 |
| 5,9 | 0,3361 | 0,3369 | 0,3378 | 0,3387 | 0,3396 |
| 6,0 | 0,3360 | 0,3368 | 0,3377 | 0,3385 | 0,3394 |
| 6,1 | 0,3359 | 0,3367 | 0,3375 | 0,3384 | 0,3392 |
| 6,2 | 0,3358 | 0,3366 | 0,3374 | 0,3382 | 0,3390 |

## TABLE II.

VALEURS DE $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

| $\frac{g}{f}$ | $\frac{Y_0}{f} = 0,9$ | $\frac{Y_0}{f} = 1,0$ | $\frac{Y_0}{f} = 1,1$ | $\frac{Y_0}{f} = 1,2$ | $\frac{Y_0}{f} = 1,3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3,5 | 0,3527 | 0,3552 | 0,3577 | 0,3601 | 0,3626 |
| 3,6 | 0,3517 | 0,3541 | 0,3565 | 0,3588 | 0,3611 |
| 3,7 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3553 | 0,3575 | 0,3597 |
| 3,8 | 0,3500 | 0,3521 | 0,3542 | 0,3563 | 0,3584 |
| 3,9 | 0,3492 | 0,3512 | 0,3532 | 0,3552 | 0,3572 |
| 4,0 | 0,3484 | 0,3504 | 0,3523 | 0,3542 | 0,3561 |
| 4,1 | 0,3477 | 0,3496 | 0,3514 | 0,3532 | 0,3551 |
| 4,2 | 0,3471 | 0,3489 | 0,3506 | 0,3523 | 0,3541 |
| 4,3 | 0,3465 | 0,3482 | 0,3498 | 0,3515 | 0,3532 |
| 4,4 | 0,3459 | 0,3475 | 0,3491 | 0,3507 | 0,3524 |
| 4,5 | 0,3454 | 0,3469 | 0,3485 | 0,3500 | 0,3516 |
| 4,6 | 0,3449 | 0,3464 | 0,3479 | 0,3493 | 0,3508 |
| 4,7 | 0,3445 | 0,3459 | 0,3473 | 0,3487 | 0,3501 |
| 4,8 | 0,3440 | 0,3454 | 0,3467 | 0,3481 | 0,3494 |
| 4,9 | 0,3436 | 0,3449 | 0,3462 | 0,3475 | 0,3488 |
| 5,0 | 0,3432 | 0,3445 | 0,3458 | 0,3470 | 0,3482 |
| 5,1 | 0,3428 | 0,3440 | 0,3453 | 0,3465 | 0,3477 |
| 5,2 | 0,3425 | 0,3436 | 0,3448 | 0,3460 | 0,3471 |
| 5,3 | 0,3421 | 0,3432 | 0,3444 | 0,3455 | 0,3466 |
| 5,4 | 0,3418 | 0,3429 | 0,3440 | 0,3450 | 0,3461 |
| 5,5 | 0,3415 | 0,3426 | 0,3436 | 0,3446 | 0,3457 |
| 5,6 | 0,3412 | 0,3422 | 0,3432 | 0,3443 | 0,3453 |
| 5,7 | 0,3410 | 0,3419 | 0,3429 | 0,3439 | 0,3449 |
| 5,8 | 0,3407 | 0,3417 | 0,3426 | 0,3436 | 0,3445 |
| 5,9 | 0,3405 | 0,3414 | 0,3423 | 0,3432 | 0,3441 |
| 6,0 | 0,3403 | 0,3411 | 0,3420 | 0,3429 | 0,3438 |
| 6,1 | 0,3401 | 0,3409 | 0,3417 | 0,3426 | 0,3435 |
| 6,2 | 0,3399 | 0,3407 | 0,3415 | 0,3423 | 0,3432 |

## TABLE III.

ARCHES *COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

| $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{g}{Y_1}$ | Diff. | $\frac{g}{f}$ | Diff. | $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{g}{Y_1}$ | Diff. | $\frac{g}{f}$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,670 | 0,94098 | 230 | 1,40444 | 134 | 0,700 | 1,01297 | 251 | 1,44710 | 152 |
| 671 | 0,94328 | 231 | 1,40578 | 135 | 701 | 1,01548 | 252 | 1,44862 | 152 |
| 672 | 0,94559 | 232 | 1,40713 | 135 | 702 | 1,01800 | 252 | 1,45014 | 153 |
| 673 | 0,94791 | 232 | 1,40848 | 136 | 703 | 1,02052 | 254 | 1,45167 | 153 |
| 674 | 0,95023 | 233 | 1,40984 | 136 | 704 | 1,02306 | 254 | 1,45320 | 154 |
| 0,675 | 0,95256 | 234 | 1,41120 | 137 | 0,705 | 1,02560 | 254 | 1,45474 | 155 |
| 676 | 0,95490 | 234 | 1,41257 | 137 | 706 | 1,02814 | 256 | 1,45629 | 156 |
| 677 | 0,95724 | 235 | 1,41394 | 138 | 707 | 1,03070 | 256 | 1,45785 | 156 |
| 678 | 0,95959 | 235 | 1,41532 | 138 | 708 | 1,03326 | 257 | 1,45941 | 157 |
| 679 | 0,96194 | 236 | 1,41670 | 139 | 709 | 1,03583 | 258 | 1,46098 | 158 |
| 0,680 | 0,96430 | 237 | 1,41809 | 139 | 0,710 | 1,03841 | 259 | 1,46256 | 158 |
| 681 | 0,96667 | 237 | 1,41948 | 140 | 711 | 1,04100 | 260 | 1,46414 | 159 |
| 682 | 0,96904 | 238 | 1,42088 | 141 | 712 | 1,04360 | 260 | 1,46573 | 160 |
| 683 | 0,97142 | 239 | 1,42229 | 141 | 713 | 1,04620 | 261 | 1,46733 | 160 |
| 684 | 0,97381 | 240 | 1,42370 | 142 | 714 | 1,04881 | 262 | 1,46893 | 161 |
| 0,685 | 0,97621 | 240 | 1,42512 | 142 | 0,715 | 1,05143 | 263 | 1,47054 | 162 |
| 686 | 0,97861 | 241 | 1,42654 | 143 | 716 | 1,05406 | 264 | 1,47216 | 162 |
| 687 | 0,98102 | 241 | 1,42797 | 144 | 717 | 1,05670 | 265 | 1,47378 | 163 |
| 688 | 0,98343 | 242 | 1,42941 | 144 | 718 | 1,05935 | 265 | 1,47541 | 164 |
| 689 | 0,98585 | 243 | 1,43085 | 145 | 719 | 1,06200 | 267 | 1,47705 | 165 |
| 0,690 | 0,98828 | 244 | 1,43230 | 145 | 0,720 | 1,06467 | 267 | 1,47870 | 166 |
| 691 | 0,99072 | 244 | 1,43375 | 146 | 721 | 1,06734 | 268 | 1,48036 | 166 |
| 692 | 0,99316 | 245 | 1,43521 | 146 | 722 | 1,07002 | 269 | 1,48202 | 167 |
| 693 | 0,99561 | 246 | 1,43667 | 147 | 723 | 1,07271 | 270 | 1,48369 | 168 |
| 694 | 0,99807 | 247 | 1,43814 | 148 | 724 | 1,07541 | 270 | 1,48537 | 168 |
| 0,695 | 1,00054 | 247 | 1,43962 | 149 | 0,725 | 1,07811 | 272 | 1,48705 | 169 |
| 696 | 1,00301 | 248 | 1,44111 | 149 | 726 | 1,08083 | 272 | 1,48874 | 170 |
| 697 | 1,00549 | 249 | 1,44260 | 149 | 727 | 1,08355 | 274 | 1,49044 | 171 |
| 698 | 1,00798 | 249 | 1,44409 | 150 | 728 | 1,08629 | 274 | 1,49215 | 172 |
| 699 | 1,01047 | 250 | 1,44559 | 151 | 729 | 1,08903 | 275 | 1,49387 | 173 |
| 0,700 | 1,01297 | | 1,44710 | | 0,730 | 1,09178 | | 1,49560 | |

## TABLE III.

**ARCHES *COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.**

| $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{g}{Y_1}$ | Diff. | $\frac{g}{f}$ | Diff. | $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{g}{Y_1}$ | Diff. | $\frac{g}{f}$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,730 | 1,09178 | 277 | 1,49560 | 173 | 0,760 | 1,17908 | 308 | 1,55142 | 201 |
| 731 | 1,09455 | 277 | 1,49733 | 174 | 761 | 1,18216 | 309 | 1,55343 | 202 |
| 732 | 1,09732 | 278 | 1,49907 | 175 | 762 | 1,18525 | 310 | 1,55545 | 203 |
| 733 | 1,10010 | 279 | 1,50082 | 176 | 763 | 1,18835 | 312 | 1,55748 | 204 |
| 734 | 1,10289 | 280 | 1,50258 | 176 | 764 | 1,19147 | 313 | 1,55952 | 205 |
| 0,735 | 1,10569 | 281 | 1,50434 | 178 | 0,765 | 1,19460 | 314 | 1,56157 | 206 |
| 736 | 1,10850 | 282 | 1,50612 | 178 | 766 | 1,19774 | 316 | 1,56363 | 208 |
| 737 | 1,11132 | 283 | 1,50790 | 179 | 767 | 1,20090 | 316 | 1,56571 | 208 |
| 738 | 1,11415 | 284 | 1,50969 | 180 | 768 | 1,20406 | 318 | 1,56779 | 210 |
| 739 | 1,11699 | 285 | 1,51149 | 181 | 769 | 1,20724 | 320 | 1,56989 | 210 |
| 0,740 | 1,11984 | 286 | 1,51330 | 182 | 0,770 | 1,21044 | 320 | 1,57199 | 212 |
| 741 | 1,12270 | 287 | 1,51512 | 182 | 771 | 1,21364 | 322 | 1,57411 | 213 |
| 742 | 1,12557 | 288 | 1,51694 | 184 | 772 | 1,21686 | 323 | 1,57624 | 215 |
| 743 | 1,12845 | 289 | 1,51878 | 184 | 773 | 1,22009 | 325 | 1,57839 | 215 |
| 744 | 1,13134 | 291 | 1,52062 | 186 | 774 | 1,22334 | 326 | 1,58054 | 216 |
| 0,745 | 1,13425 | 291 | 1,52248 | 186 | 0,775 | 1,22660 | 327 | 1,58270 | 218 |
| 746 | 1,13716 | 292 | 1,52434 | 187 | 776 | 1,22987 | 328 | 1,58488 | 219 |
| 747 | 1,14008 | 293 | 1,52621 | 188 | 777 | 1,23315 | 330 | 1,58707 | 220 |
| 748 | 1,14301 | 295 | 1,52809 | 189 | 778 | 1,23645 | 332 | 1,58927 | 222 |
| 749 | 1,14596 | 295 | 1,52998 | 190 | 779 | 1,23977 | 333 | 1,59149 | 222 |
| 0,750 | 1,14891 | 297 | 1,53188 | 191 | 0,780 | 1,24310 | 334 | 1,59371 | 224 |
| 751 | 1,15188 | 297 | 1,53379 | 192 | 781 | 1,24644 | 336 | 1,59595 | 225 |
| 752 | 1,15485 | 299 | 1,53571 | 193 | 782 | 1,24980 | 337 | 1,59820 | 227 |
| 753 | 1,15784 | 300 | 1,53764 | 194 | 783 | 1,25317 | 338 | 1,60047 | 227 |
| 754 | 1,16084 | 301 | 1,53958 | 195 | 784 | 1,25655 | 340 | 1,60274 | 229 |
| 0,755 | 1,16385 | 302 | 1,54153 | 195 | 0,785 | 1,25995 | 342 | 1,60503 | 231 |
| 756 | 1,16687 | 304 | 1,54348 | 197 | 786 | 1,26337 | 343 | 1,60734 | 231 |
| 757 | 1,16991 | 304 | 1,54545 | 198 | 787 | 1,26680 | 344 | 1,60965 | 233 |
| 758 | 1,17295 | 306 | 1,54743 | 199 | 788 | 1,27024 | 346 | 1,61198 | 235 |
| 759 | 1,17601 | 307 | 1,54942 | 200 | 789 | 1,27370 | 348 | 1,61433 | 236 |
| 0,760 | 1,17908 | | 1,55142 | | 0,790 | 1,27718 | | 1,61669 | |

## TABLE III.

### ARCHES *COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

| $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{g}{Y_1}$ | Diff. | $\frac{g}{f}$ | Diff. | $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{g}{Y_1}$ | Diff. | $\frac{g}{f}$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,790 | 1,27718 | 349 | 1,61669 | 237 | 0,820 | 1,38952 | 405 | 1,69454 | 286 |
| 791 | 1,28067 | 351 | 1,61906 | 238 | 821 | 1,39357 | 406 | 1,69740 | 288 |
| 792 | 1,28418 | 352 | 1,62144 | 240 | 822 | 1,39763 | 409 | 1,70028 | 290 |
| 793 | 1,28770 | 354 | 1,62384 | 241 | 823 | 1,40172 | 411 | 1,70318 | 292 |
| 794 | 1,29124 | 356 | 1,62625 | 243 | 824 | 1,40583 | 413 | 1,70610 | 295 |
| 0,795 | 1,29480 | 357 | 1,62868 | 244 | 0,825 | 1,40996 | 416 | 1,70905 | 296 |
| 796 | 1,29837 | 359 | 1,63112 | 246 | 826 | 1,41412 | 418 | 1,71201 | 298 |
| 797 | 1,30196 | 361 | 1,63358 | 247 | 827 | 1,41830 | 420 | 1,71499 | 300 |
| 798 | 1,30557 | 362 | 1,63605 | 249 | 828 | 1,42250 | 422 | 1,71799 | 303 |
| 799 | 1,30919 | 364 | 1,63854 | 250 | 829 | 1,42672 | 425 | 1,72102 | 304 |
| 0,800 | 1,31283 | 366 | 1,64104 | 252 | 0,830 | 1,43097 | 427 | 1,72406 | 307 |
| 801 | 1,31649 | 368 | 1,64356 | 253 | 831 | 1,43524 | 430 | 1,72713 | 309 |
| 802 | 1,32017 | 369 | 1,64609 | 255 | 832 | 1,43954 | 432 | 1,73022 | 311 |
| 803 | 1,32386 | 371 | 1,64864 | 256 | 833 | 1,44386 | 435 | 1,73333 | 313 |
| 804 | 1,32757 | 373 | 1,65120 | 258 | 834 | 1,44821 | 437 | 1,73646 | 316 |
| 0,805 | 1,33130 | 374 | 1,65378 | 260 | 0,835 | 1,45258 | 440 | 1,73962 | 318 |
| 806 | 1,33504 | 377 | 1,65638 | 261 | 836 | 1,45698 | 442 | 1,74280 | 320 |
| 807 | 1,33881 | 378 | 1,65899 | 263 | 837 | 1,46140 | 445 | 1,74600 | 323 |
| 808 | 1,34259 | 381 | 1,66162 | 265 | 838 | 1,46585 | 448 | 1,74923 | 325 |
| 809 | 1,34640 | 382 | 1,66427 | 267 | 839 | 1,47033 | 450 | 1,75248 | 327 |
| 0,810 | 1,35022 | 384 | 1,66694 | 268 | 0,840 | 1,47483 | 453 | 1,75575 | 330 |
| 811 | 1,35406 | 386 | 1,66962 | 269 | 841 | 1,47936 | 456 | 1,75905 | 332 |
| 812 | 1,35792 | 388 | 1,67231 | 272 | 842 | 1,48392 | 458 | 1,76237 | 335 |
| 813 | 1,36180 | 390 | 1,67503 | 273 | 843 | 1,48850 | 462 | 1,76572 | 338 |
| 814 | 1,36570 | 392 | 1,67776 | 275 | 844 | 1,49312 | 464 | 1,76910 | 340 |
| 0,815 | 1,36962 | 394 | 1,68051 | 277 | 0,845 | 1,49776 | 467 | 1,77250 | 342 |
| 816 | 1,37356 | 396 | 1,68328 | 279 | 846 | 1,50243 | 470 | 1,77592 | 346 |
| 817 | 1,37752 | 398 | 1,68607 | 280 | 847 | 1,50713 | 473 | 1,77938 | 348 |
| 818 | 1,38150 | 400 | 1,68887 | 283 | 848 | 1,51186 | 476 | 1,78286 | 350 |
| 819 | 1,38550 | 402 | 1,69170 | 284 | 849 | 1,51662 | 479 | 1,78636 | 354 |
| 0,820 | 1,38952 | | 1,69454 | | 0,850 | 1,52141 | | 1,78990 | |

## TABLE III.

### ARCHES COMPLÈTES, OU EN ANSE DE PANIER.

| $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{g}{Y_1}$ | Diff. | $\frac{g}{f}$ | Diff. | $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{g}{Y_1}$ | Diff. | $\frac{g}{f}$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,850 | 1,52141 | 483 | 1,78990 | 356 | 0,880 | 1,68177 | 600 | 1,91110 | 464 |
| 851 | 1,52624 | 485 | 1,79346 | 359 | 881 | 1,68777 | 604 | 1,91574 | 468 |
| 852 | 1,53109 | 488 | 1,79705 | 362 | 882 | 1,69381 | 610 | 1,92042 | 473 |
| 853 | 1,53597 | 492 | 1,80067 | 365 | 883 | 1,69991 | 615 | 1,92515 | 478 |
| 854 | 1,54089 | 495 | 1,80432 | 368 | 884 | 1,70606 | 620 | 1,92993 | 482 |
| 0,855 | 1,54584 | 499 | 1,80800 | 371 | 0,885 | 1,71226 | 625 | 1,93475 | 487 |
| 856 | 1,55083 | 501 | 1,81171 | 374 | 886 | 1,71851 | 630 | 1,93962 | 493 |
| 857 | 1,55584 | 505 | 1,81545 | 377 | 887 | 1,72481 | 636 | 1,94455 | 497 |
| 858 | 1,56089 | 509 | 1,81922 | 381 | 888 | 1,73117 | 642 | 1,94952 | 502 |
| 859 | 1,56598 | 512 | 1,82303 | 383 | 889 | 1,73759 | 647 | 1,95454 | 508 |
| 0,860 | 1,57110 | 516 | 1,82686 | 387 | 0,890 | 1,74406 | 653 | 1,95962 | 513 |
| 861 | 1,57626 | 519 | 1,83073 | 390 | 891 | 1,75059 | 659 | 1,96475 | 519 |
| 862 | 1,58145 | 523 | 1,83463 | 393 | 892 | 1,75718 | 665 | 1,96994 | 524 |
| 863 | 1,58668 | 527 | 1,83856 | 397 | 893 | 1,76383 | 672 | 1,97518 | 530 |
| 864 | 1,59195 | 530 | 1,84253 | 400 | 894 | 1,77055 | 677 | 1,98048 | 535 |
| 0,865 | 1,59725 | 534 | 1,84653 | 404 | 0,895 | 1,77732 | 684 | 1,98583 | 542 |
| 866 | 1,60259 | 539 | 1,85057 | 407 | 896 | 1,78416 | 690 | 1,99125 | 547 |
| 867 | 1,60798 | 542 | 1,85464 | 411 | 897 | 1,79106 | 697 | 1,99672 | 554 |
| 868 | 1,61340 | 546 | 1,85875 | 415 | 898 | 1,79803 | 704 | 2,00226 | 560 |
| 869 | 1,61886 | 550 | 1,86290 | 418 | 899 | 1,80507 | 710 | 2,00786 | 566 |
| 0,870 | 1,62436 | 554 | 1,86708 | 422 | 0,900 | 1,81217 | 718 | 2,01352 | 573 |
| 871 | 1,62990 | 559 | 1,87130 | 426 | 901 | 1,81935 | 724 | 2,01925 | 580 |
| 872 | 1,63549 | 563 | 1,87556 | 430 | 902 | 1,82659 | 732 | 2,02505 | 586 |
| 873 | 1,64112 | 567 | 1,87986 | 434 | 903 | 1,83391 | 740 | 2,03091 | 594 |
| 874 | 1,64679 | 572 | 1,88420 | 438 | 904 | 1,84131 | 747 | 2,03685 | 600 |
| 0,875 | 1,65251 | 576 | 1,88858 | 442 | 0,905 | 1,84878 | 755 | 2,04285 | 608 |
| 876 | 1,65827 | 580 | 1,89300 | 446 | 906 | 1,85633 | 763 | 2,04893 | 615 |
| 877 | 1,66407 | 586 | 1,89746 | 450 | 907 | 1,86396 | 771 | 2,05508 | 623 |
| 878 | 1,66993 | 590 | 1,90196 | 455 | 908 | 1,87167 | 779 | 2,06131 | 630 |
| 879 | 1,67583 | 594 | 1,90651 | 459 | 909 | 1,87946 | 788 | 2,06761 | 638 |
| 0,880 | 1,68177 | | 1,91110 | | 0,910 | 1,88734 | | 2,07399 | |

## TABLE III.

### ARCHES *COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

| $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{g}{Y_1}$ | Diff. | $\frac{g}{f}$ | Diff. | $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{g}{Y_1}$ | Diff. | $\frac{g}{f}$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,910 | 1,88734 | 796 | 2,07399 | 647 | 0,940 | 2,17571 | 1193 | 2,31458 | 1022 |
| 911 | 1,89530 | 805 | 2,08046 | 655 | 941 | 2,18764 | 1213 | 2,32480 | 1041 |
| 912 | 1,90335 | 814 | 2,08701 | 663 | 942 | 2,19977 | 1234 | 2,33521 | 1062 |
| 913 | 1,91149 | 824 | 2,09364 | 672 | 943 | 2,21211 | 1256 | 2,34583 | 1082 |
| 914 | 1,91973 | 833 | 2,10036 | 681 | 944 | 2,22467 | 1279 | 2,35665 | 1103 |
| 0,915 | 1,92806 | 843 | 2,10717 | 690 | 0,945 | 2,23746 | 1302 | 2,36768 | 1126 |
| 916 | 1,93649 | 853 | 2,11407 | 700 | 946 | 2,25048 | 1326 | 2,37894 | 1149 |
| 917 | 1,94502 | 863 | 2,12107 | 709 | 947 | 2,26374 | 1351 | 2,39043 | 1173 |
| 918 | 1,95365 | 874 | 2,12816 | 719 | 948 | 2,27725 | 1377 | 2,40216 | 1198 |
| 919 | 1,96239 | 884 | 2,13535 | 729 | 949 | 2,29102 | 1404 | 2,41414 | 1224 |
| 0,920 | 1,97123 | 895 | 2,14264 | 740 | 0,950 | 2,30506 | 1433 | 2,42638 | 1251 |
| 921 | 1,98018 | 907 | 2,15004 | 750 | 951 | 2,31939 | 1462 | 2,43889 | 1280 |
| 922 | 1,98925 | 918 | 2,15754 | 761 | 952 | 2,33401 | 1493 | 2,45169 | 1309 |
| 923 | 1,99843 | 930 | 2,16515 | 772 | 953 | 2,34894 | 1524 | 2,46478 | 1340 |
| 924 | 2,00773 | 942 | 2,17287 | 783 | 954 | 2,36418 | 1558 | 2,47818 | 1371 |
| 0,925 | 2,01715 | 955 | 2,18070 | 796 | 0,955 | 2,37976 | 1593 | 2,49189 | 1405 |
| 926 | 2,02670 | 967 | 2,18866 | 808 | 956 | 2,39569 | 1629 | 2,50594 | 1441 |
| 927 | 2,03637 | 981 | 2,19674 | 820 | 957 | 2,41198 | 1667 | 2,52035 | 1478 |
| 928 | 2,04618 | 994 | 2,20494 | 833 | 958 | 2,42865 | 1708 | 2,53513 | 1516 |
| 929 | 2,05612 | 1009 | 2,21327 | 846 | 959 | 2,44573 | 1749 | 2,55029 | 1557 |
| 0,930 | 2,06621 | 1022 | 2,22173 | 859 | 0,960 | 2,46322 | 1794 | 2,56586 | 1599 |
| 931 | 2,07643 | 1038 | 2,23032 | 874 | 961 | 2,48116 | 1840 | 2,58185 | 1644 |
| 932 | 2,08681 | 1052 | 2,23906 | 889 | 962 | 2,49956 | 1889 | 2,59829 | 1692 |
| 933 | 2,09733 | 1069 | 2,24795 | 903 | 963 | 2,51845 | 1940 | 2,61521 | 1742 |
| 934 | 2,10802 | 1084 | 2,25698 | 919 | 964 | 2,53785 | 1995 | 2,63263 | 1794 |
| 0,935 | 2,11886 | 1102 | 2,26617 | 934 | 0,965 | 2,55780 | 2053 | 2,65057 | 1851 |
| 936 | 2,12988 | 1118 | 2,27551 | 951 | 966 | 2,57833 | 2114 | 2,66908 | 1910 |
| 937 | 2,14106 | 1136 | 2,28502 | 968 | 967 | 2,59947 | 2179 | 2,68818 | 1973 |
| 938 | 2,15242 | 1155 | 2,29470 | 985 | 968 | 2,62126 | 2248 | 2,70791 | 2040 |
| 939 | 2,16397 | 1174 | 2,30455 | 1003 | 969 | 2,64374 | 2321 | 2,72831 | 2112 |
| 0,940 | 2,17571 | | 2,31458 | | 0,970 | 2,66695 | | 2,74943 | |

## TABLE III.

ARCHES *COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

| $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{g}{Y_1}$ | Diff. | $\frac{g}{f}$ | Diff. | $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{g}{Y_1}$ | Diff. | $\frac{g}{f}$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,970 | 2,66695 | 2400 | 2,74943 | 2189 | 0,985 | 3,15740 | 4880 | 3,20548 | 4624 |
| 971 | 2,69095 | 2484 | 2,77132 | 2270 | 986 | 3,20620 | 5242 | 3,25172 | 4982 |
| 972 | 2,71579 | 2574 | 2,79402 | 2358 | 987 | 3,25862 | 5661 | 3,30154 | 5395 |
| 973 | 2,74153 | 2671 | 2,81760 | 2453 | 988 | 3,31523 | 6154 | 3,35549 | 5883 |
| 974 | 2,76824 | 2776 | 2,84213 | 2556 | 989 | 3,37677 | 6740 | 3,41432 | 6464 |
| 0,975 | 2,79600 | 2888 | 2,86769 | 2666 | 0,990 | 3,44417 | 7451 | 3,47896 | 7168 |
| 976 | 2,82488 | 3012 | 2,89435 | 2786 | 991 | 3,51868 | 8330 | 3,55064 | 8039 |
| 977 | 2,85500 | 3145 | 2,92221 | 2917 | 992 | 3,60198 | 9443 | 3,63103 | 9144 |
| 978 | 2,88645 | 3292 | 2,95138 | 3061 | 993 | 3,69641 | 10901 | 3,72247 | 10592 |
| 979 | 2,91937 | 3452 | 2,98199 | 3218 | 994 | 3,80542 | 12892 | 3,82839 | 12572 |
| 0,980 | 2,95389 | 3629 | 3,01417 | 3392 | 0,995 | 3,93434 | 15779 | 3,95411 | 15446 |
| 981 | 2,99018 | 3825 | 3,04809 | 3585 | 996 | 4,09213 | 20343 | 4,10857 | 19992 |
| 982 | 3,02843 | 4043 | 3,08394 | 3800 | 997 | 4,29556 | 28671 | 4,30849 | 28297 |
| 983 | 3,06886 | 4289 | 3,12194 | 4040 | 998 | 4,58227 | 49013 | 4,59146 | 48602 |
| 984 | 3,11175 | 4565 | 3,16234 | 4314 | 999 | 5,07240 | ∞ | 5,07748 | ∞ |
| 0,985 | 3,15740 | | 3,20548 | | 1,000 | ∞ | | ∞ | |

## TABLE IV.

ARCHES *COMPLÈTES*,
OU *EN ANSE DE PANIER*.

Table pour corriger la valeur de $f$, étant donnés $g$ et $Y_1$.

| $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{Y_1}{e^2}\delta f$ | $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{Y_1}{e^2}\delta f$ |
|---|---|---|---|
| 0,67 | + 0,0005 | 0,78 | + 0,0001 |
| 68 | 0,0004 | 79 | 0,0001 |
| 69 | 0,0004 | 80 | 0,0001 |
| 70 | 0,0003 | 81 | 0,0001 |
| 71 | 0,0003 | 82 | 0,0001 |
| 72 | 0,0003 | 83 | 0,0000 |
| 73 | 0,0002 | 84 | 0,0000 |
| 74 | 0,0002 | .. | 0,0000 |
| 75 | 0,0002 | .. | 0,0000 |
| 76 | 0,0001 | .. | 0,0000 |
| 77 | 0,0001 | .. | 0,0000 |
| 78 | 0,0001 | 1,00 | 0 |

## TABLE V.

ARCHES *COMPLÈTES*,
OU *EN ANSE DE PANIER*.

Table pour corriger la valeur de $Y_1$, étant donnés $f$ et $g$.

| $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{Y_1}{e^2}\delta Y_1$ | $\frac{f}{Y_1}$ | $\frac{Y_1}{e^2}\delta Y_1$ |
|---|---|---|---|
| 0,67 | — 0,0024 | 0,78 | — 0,0003 |
| 68 | — 0,0020 | 79 | — 0,0003 |
| 69 | — 0,0017 | 80 | — 0,0002 |
| 70 | — 0,0015 | 81 | — 0,0002 |
| 71 | — 0,0012 | 82 | — 0,0002 |
| 72 | — 0,0010 | 83 | — 0,0001 |
| 73 | — 0,0009 | 84 | — 0,0001 |
| 74 | — 0,0007 | 85 | — 0,0001 |
| 75 | — 0,0006 | 86 | — 0,0001 |
| 76 | — 0,0005 | 87 | — 0,0000 |
| 77 | — 0,0004 | .. | — 0,0000 |
| 78 | — 0,0003 | 1,00 | 0 |

FIN.

# TABLE DES MATIÈRES.

## PREMIÈRE PARTIE.

Pages.

*Préambule* ..... 1

*Indétermination du problème de l'équilibre des voûtes en berceau* ..... 8

*Équations de l'équilibre d'une voûte en berceau soumise à l'action de forces agissant normalement à l'extrados* ..... 11

Notations ..... 17

L'épaisseur fictive est constante; transformation des équations différentielles ..... 23

Situation du centre de gravité d'un voussoir élémentaire; convention relative aux quantités très-petites du premier ordre ..... 25

Poids du voussoir élémentaire; pressions remplacées par les hauteurs de charge; équations différentielles, en introduisant ces hauteurs; rayon de courbure de l'intrados ..... 28

*Indétermination de l'action des charges sur les reins des voûtes dans les arches de pont* ..... 30

*Disposition de la charge extérieure d'une arche, donnant lieu à des pressions normales déterminées, égales à celles que produirait un fluide ayant la densité du massif; l'auteur adopte cette hypothèse* ..... 34

*Application des formules de l'équilibre au cas où les pressions normales extérieures aux voussoirs sont proportionnelles à la hauteur de la charge qui s'élève au-dessus de ceux-ci* ..... 38

Spécification plus précise des quantités du premier ordre de petitesse. 40

Équation différentielle fondamentale; expression de la hauteur de charge ..... 42

Rayon de courbure de l'intrados fictif; vérification de son expression; épaisseur réelle ..... 43

*Développement de l'équation différentielle de l'intrados* ..... 46

Pg.

*Décomposition du polynôme* $R^2$ *en ses facteurs du premier degré. Limites de la courbe intrados dans le sens des* y . . . . . 48

*Réduction de l'intégrale aux quadratures* . . . . . 57

*Réduction aux fonctions elliptiques, de l'équation de la courbe intrados* . . . . . 60

Intégrale réduite aux fonctions elliptiques . . . . . 85

*Calcul des fonctions F et E* . . . . . 86

*Vérification de l'exactitude des coefficients de l'équation de la courbe intrados* . . . 89

*Détermination des constantes* . . . . . 91

Tableau des formules relatives à l'équation de la courbe intrados . . . 93

Arches incomplètes, du genre des arches dites *en arc de cercle;* arches complètes ou *en anse de panier* . . . . . 94

*Cas des arches incomplètes* . . . . . 97

*Limites de la valeur de l'épaisseur fictive, dans les arches incomplètes* . . . . . 102

*Cas des arches complètes* . . . . . 105

*Valeur approchée de l'épaisseur fictive, dans les arches complètes* . . . . . 112

*Poussée de la voûte et du massif contre les culées* . . . . . 115

*Calcul des coordonnées, inclinaisons des joints, rayons de courbure, etc.* . . . . . 119

*Solution du problème au moyen de procédés graphiques* . . . . . 124

*Comparaison des arches établies suivant les idées de l'auteur, avec celles dont l'intrados présente les formes aujourd'hui en usage* . . . . . 129

## DEUXIÈME PARTIE.

*Préambule* . . . . . 132

*Simplification des formules générales, pour les cas ordinaires que présentent les arches de pont* . . . . . 134

Les fonctions elliptiques sont remplacées par des fonctions explicites algébriques et transcendantes . . . . . 141

Expressions simplifiées pour le calcul de la tangente à l'intrados . . . . 143

*Résumé des formules simplifiées pour le cas où la voûte et le massif sont de même densité.* (Notations.) . . . . . 144

Pages.

*De la construction de Tables appropriées à la détermination des inconnues dans le cas des arches incomplètes dites* en arc de cercle..... 148

La solution qui se présente d'abord comme dépendante de Tables à triple entrée est ramenée à dépendre de deux Tables à double entrée, dont l'une fournit une valeur approchée de l'inconnue principale, et l'autre la correction de cette valeur..... 150

*Construction de Tables pour le cas des arches complètes ou* en anse de panier... 157

Les Tables à double entrée sont remplacées par des Tables à simple entrée : les unes donnent une solution approchée, les autres en fournissent la correction..... 159

En pratique, on peut s'en tenir à la solution approchée, qui est suffisamment exacte..... 168

*Poussée de la voûte et du massif contre les culées, inclinaison du dernier joint sur la verticale, volume d'une demi-arche et de la partie correspondante du massif.* 169

*Calcul des coordonnées, inclinaisons des joints, rayons de courbure, épaisseurs, etc.* 172

*Simplification du tracé de l'intrados fictif, au moyen de son rayon de courbure...* 176

*Données expérimentales relatives à la limite de la résistance des matériaux employés dans les constructions*..... 178

RÉSUMÉ *concernant l'établissement des arches de pont dans lesquelles la voûte et le massif peuvent être supposés d'égale densité*..... 181

*Usage des Tables*..... 182

Arches incomplètes dites *en arc de cercle*..... *Ibid.*

Arches complètes dites *en anse de panier*..... 184

*Poussée de la voûte et du massif, inclinaison du joint des naissances, volume des matériaux*..... 186

Arches incomplètes dites *en arc de cercle*..... *Ibid.*

Arches complètes ou *en anse de panier*..... 187

*Calcul des coordonnées, inclinaisons des joints, rayons de courbure, épaisseurs, etc.* 189

*Tracé du profil de la voûte au moyen du rayon de courbure de l'intrados fictif...* 191

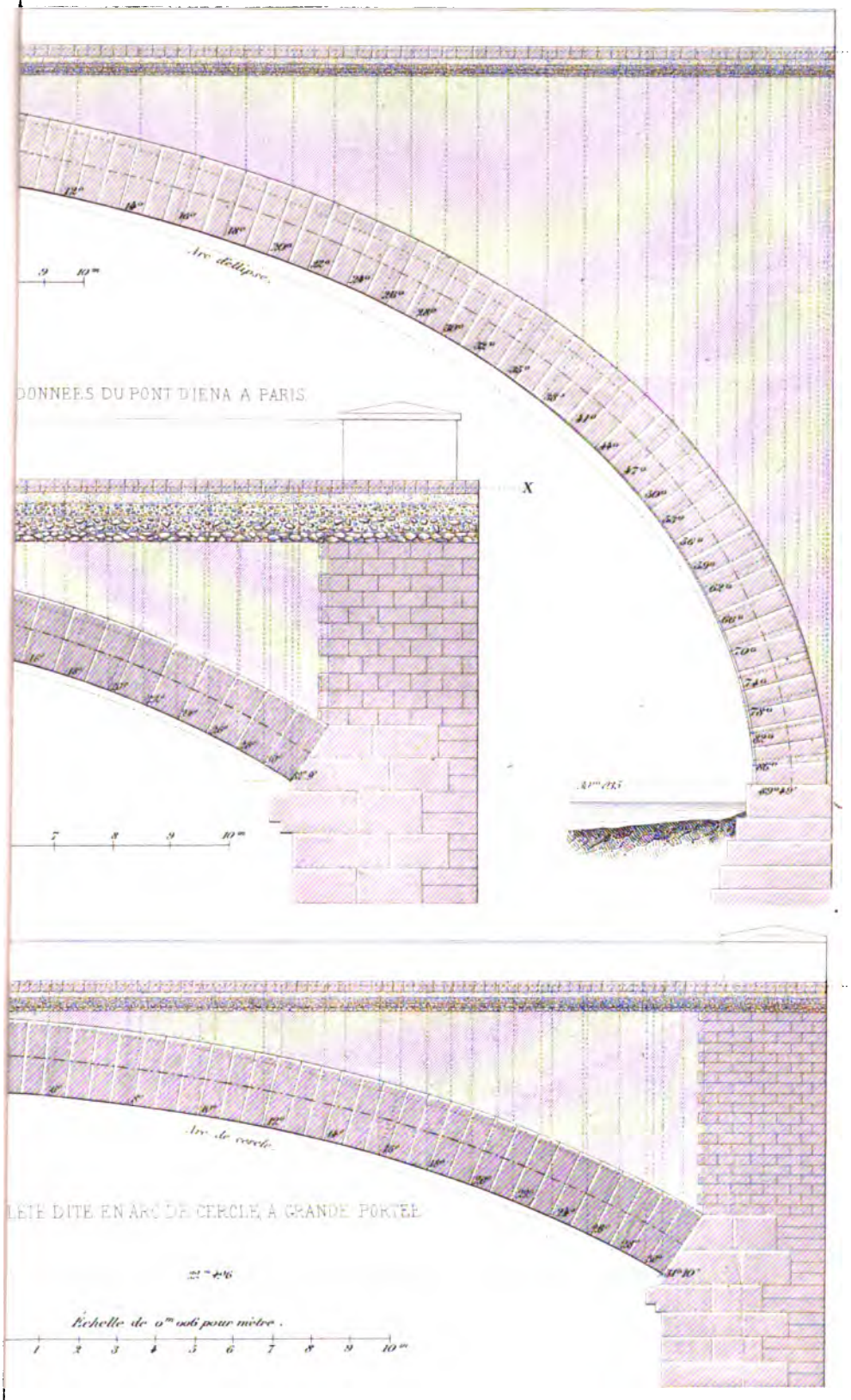
APPLICATIONS.

*Arches incomplètes dites* en arc de cercle.

Premier exemple. Pont d'Iéna, à Paris..... 192

Deuxième exemple. Arche à grande portée, de 5 mètres de flèche et de près de 45 mètres d'ouverture..... 202

E COMPLÈTE OU EN ANSE DE PANIER A GRANDE PORTEE




Gravé sur pierre à l'Imprimerie Impériale.

Eng 748.53.2
Sur l'etablissement des arches de
Cabot Science 006837084
3 2044 092 013 895